DPL 29

Utmanande problem med procedurer

När vill man ha problem? Ja, det är väl framförallt i olika utbildningssammanhang, eftersom problemlösning anses bra för inlärningen och danande för karaktären. Till vardags är de flesta däremot lyckliga med att rutinerna flyter på, så att vi slipper laga punkan på bilen på väg till jobbet, slipper torka det magsjuka barnets spyor i hallen på väg till dagis, slipper leta efter förlagda glasögon som vi inte kan hitta just på grund av att vi inte kan se utan just nämnda glasögon. Rutiner och invanda procedurer smörjer kugghjulen i vår tillvaro och ger oss tid och kraft för annat.

Kanske vore det bättre att tala om ”utmaningar” istället för ”problem”? Utmaningar vill de flesta ha, ett slags anpassade provokationer som får oss att växa och känna att vårt kunnande prövas till det yttersta. Finns det något som är mer stärkande för självkänslan än att ha klarat av en sådan utmaning? Utmaningar kräver kreativitet och intuition, men också färdigheter. Utan färdigheter finns ju inget kunnande att pröva.

Det kan också vara lämpligt att fundera på vad som bör menas med ett ”matematiskt problem”. Rimligen bör det vara en uppgift eller situation där det inte finns en för individen redan självklar och inövad rutin för hur uppgiften ska lösas. Detta innebär att ordet ”problem” beskriver en relation mellan en uppgift och en specifik individ vid en viss tidpunkt: det som är ett problem för en individ behöver inte vara det för en annan. Och det som var ett problem för individen igår, behöver inte vara det idag om denne lyckats lösa uppgiften. Problemet får inte heller kräva sådana förkunskaper att det är omöjligt att lösa. Uppgiften skall vara lösbar, men inte självklar. En svår konst är att kunna erbjuda alla uppgifter som är problem just för dem!

När individens kunskaper om procedurer och algoritmer växer kommer en del tidigare problem att automatiskt förvandlas till rutinuppgifter. Den som t ex kan lösa andragradsekvationer kan hantera en mängd uppgifter som det tidigare krävts avsevärd möda och kreativitet för att lösa. Procedurkunnande frigör alltså vår kreativa förmåga så att den kan få verka på en högre nivå.

Men i den pedagogiska debatten, inte minst för matematikens del, har ibland ord som rutin, algoritm och procedur fått något av dödskallemärkning över sig. Hur har det blivit på detta viset? Antagligen som en reaktion på äldre tiders alltför överdrivna färdighetsdrillande. Något som inte bara gällde för matematik utan också för t ex musik och språk, d v s det som ofta kallades ”färdighetsämnen” Vem minns inte musiklektionernas evinnerliga övande på skalor? Idag får barnen redan efter några lektioner pröva sina vingar med enkla melodier och improvisationer. Och visst finns det all anledning att stärka de kreativa inslagen i undervisningen, så långt är reaktionen mot det gamla både välgörande och relevant!

Det är ändå viktigt att inte kasta ut barnet med badvattnet. Matematikens procedurer är i själva verket resultatet av tidigare generationers kreativitet och förståelse och är lika förnuftiga och rationella som andra matematiska aktiviteter. Ta t ex en divisionsalgoritm. En sådan bygger på en gedigen förståelse av positionssystemet och är en kreativ konstruktion som fungerar för alla tänkbara divisioner. Att kunna förstå och stegvis utveckla en divisionsalgoritm som t ex *liggande stolen* gör det också möjligt att förstå varför ett rationellt tal alltid måste ha en periodisk decimalutveckling. Samspelet mellan matematikens procedurer och förståelse och kreativitet är mycket intrikat. Det avgörande felet i lärandet av procedurer ligger någon annanstans; det bygger på ett felaktigt förhållningssätt. Anser man att procedurer är något oförnuftigt och mekaniskt där tänkandet kan kopplas bort, då är man fel ute. Om man istället ser procedurerna som förnuftiga arrangemang som både kan underbygga och vägleda kreativ problemlösning, ja då har man hamnat rätt!

105

Våra aritmetiska algoritmer har sett olika ut i olika tider och olika kulturer. En sådan algoritm för multiplikation är den s k *ryske bondens metod*. Anta till exempel att du ska multiplicera talen 13 och 14. Algoritmen säger då att du ska halvera det ena talet och fördubbla det andra stegvis. Om man ska halvera ett udda tal, skrivs bara heltalsdelen i nästa led. Vi får då :

x 13	14
6	28
x 3	56
x 1	112

Markera alla udda tal i vänsterkolumnen och addera motsvarande tal i den högra, dvs $112 + 56 + 14 = 182$. Alltså är produkten 182. Frågan är då vad det finns för förnuft i metoden, dvs hur kommer det sig att den fungerar? Kan den bara användas för att beräkna produkten av heltal?

106

Under medeltiden var det vanligt att man använde sina fingrar som grund för enkla algoritmer. Anta att produkten av 7 och 8 ska beräknas: Höj då $7 - 5 = 2$ fingrar på vänster hand och $8 - 5 = 3$ fingrar på höger hand, och böj övriga fingrar. Summan av de höjda fingrarna ger då tio-talssiffran, dvs 5, och produkten av de böjda fingrarna ger entalssiffran, dvs 6. Svaret är 56. Hur kommer det sig att metoden fungerar?

Redan under antiken fanns algoritmer för att lösa problem med flera obekanta. Problem nr 49 i Grekiska antologin lyder sålunda:

107

Tillverka en krona som väger sextio minae och som innehåller guld och mässing, tenn och smitt järn. Guld och mässing bildar två tredjedelar, guld och tenn tre fjärdedelar, guld och järn tre femtedelar. Säg mig hur mycket guld, mässing, tenn och järn du måste använda för att hela kronan skall väga sextio minae.

Hur skulle man kunna lösa problemet med en "modern" uppställning av ekvationer? Hur skulle en lösning utan ekvationer kunna se ut? Är det självklart att ett problem av denna typ har en lösning?

Proceduren att summera bråk brukar vålla en hel del bekymmer bland våra elever. Ibland kan man få se elever göra följande allvarliga fel:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{3+4} = \frac{5}{7}$$

Underligt nog så fungerar en sådan här procedur i vissa fall. Anta t ex att man har en skål med 2 röda och 3 svarta kulor och en annan skål med 3 röda och 4 svarta kulor. Om man nu häller ihop alla kulorna i en tredje skål så blir förhållandet mellan röda och svarta kulor just 5/7.

108

Samma procedur leder till rätt resultat också i vissa andra fall. Anta t ex att du först kör bil 270 km på 3 timmar och sedan 150 km på 2 timmar. Den första medelhastigheten blir då 270/3 = 90 km/h och den andra 150/2 = 75 km/h. Och den totala medelhastigheten blir:

$$\frac{270}{3} + \frac{150}{2} = \frac{270+150}{3+2} = \frac{420}{5} = 84 \text{ km/h}$$

När kan denna "felaktiga" procedur användas, och när kan den inte användas?

Lars Mouwitz