Henrik Petersson

Differentierade problem

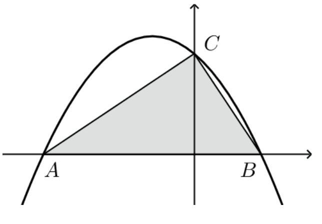
Alla elever ska ges möjlighet att arbeta med problemlösning. Med den spridning som alltid finns i klasser är det en utmaning att erbjuda eleverna lämpliga problem att arbeta med. För att få detta att fungera har författaren konstruerat differentierade problem. Här beskriver han tankar som lett fram till en bok och ger förslag på hur problemen kan användas.

Som lärare står du dagligen framför elevgrupper med en betydande spridning både när det gäller kunskaper och allmän matematisk förmåga. Vi ska samtidigt försöka möta lågpresterande elever, högpresterande elever, elever med särskild begåvning och elever med en lång rad olika förutsättningar och behov. Detta komplexa uppdrag kan vi i lärarrollen hantera genom att försöka möta behoven i någon slags "mittfåra", men även de svagare eleverna behöver bjudas in till exempelvis problemlösningsaktiviteter.

Vid en skolinspektionsgranskning av min egen skola framkom det att många elever uppfattade arbete med problemlösning som någon slags överkurs, något som de kunde ägnade sig åt om de fick tid över. I praktiken innebär det att många elever inte alls arbetar med problemlösning. De mer drivna behöver också vägledning i sitt arbete, i sin jakt på utmaningar. Om de lämnas ensamma i arbetet med eller i uppföljningen av ett problemlösningsarbete, finns en risk att de inte uppfattar kvalitativa komponenter som de kan utveckla. Att ta fram individanpassade problem och aktiviteter är tidskrävande, och det är svårt att som lärare följa upp elevernas *olika* arbeten.

Den fråga som jag försöker ringa in är: Hur skapar vi *gemensamma* aktiviteter där *alla* kan utvecklas? Målet här är att ge förslag på arbetssätt. Som utgångspunkt väljer jag följande problem som är relevant för gymnasiets andra kurs, Matematik 2bc:

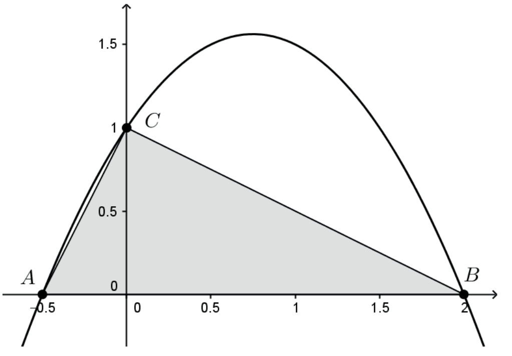
> Betrakta funktionen $f(x) = (3 + x)(b - x)$. Bestäm konstanten b så att grafens skärningspunkter A, B, C med koordinataxlarna bildar en rätvinklig triangel, se figuren.



Problemet, eller uppgiften, är inte helt enkelt. Många elever behöver både en och två knuffar för att komma till någon form av ansats. Samtidigt är problemet relativt statiskt (slutet), i den mening att en elev som löser uppgiften stannar förmodligen med detta, utan att reflektera kring några följdfrågor. För vissa elever är problemet inte tillräckligt öppet och utmanande för att det ska kännas meningsfullt. Jag föreslår att problemet istället förpackas på ett *differentierat* sätt.

Differentierat problem 1

Låt f vara en funktion på formen $f(x)=(x-a)(b-x)$, där $a \neq b$. Det här problemet handlar om att undersöka när grafens skärningspunkter A, B, C med koordinataxlarna, bildar en rätvinklig triangel ABC. Vi kallar en sådan funktion för en rätvinklig andragradsfunktion. I figuren ser du grafen för en sådan rätvinklig andragradsfunktion f:



a) Visa att triangeln ABC verkligen är rätvinklig.
b) Visa att andragradsfunktionen vars graf är ritad ovan verkligen är en funktion på formen $f(x)=(x-a)(b-x)$.
c) Låt $0<b=-a$, dvs låt $f(x)=(x+b)(b-x)$ där b är ett positivt tal. Undersök möjliga värden på b så att f blir rätvinklig.
d) Låt $a=-3$, dvs låt $f(x)=(x+3)(b-x)$. Undersök möjliga värden på b så att f blir rätvinklig.
e) Undersök villkor för a och b så att $f(x)=(x-a)(b-x)$ blir en rätvinklig andragradsfunktion.

Strukturen är alltså den att problemet är uppdelat i en sekvens av delproblem, med stegrad komplexitet, som mynnar ut i en mer öppen frågeställning, själva huvudproblemet. Alla elever får en möjlighet att komma en bit in i problemet, samtidigt som problemet utmanar de duktigare eleverna. Som lärare får man möjlighet att följa upp alla elevers arbete, då eleverna har arbetat med samma problem. En annan poäng med denna differentierade problemform är att delproblemen visar på hur en komplex problemställning kan delas upp i enklare delar. Många elever blir passiva då de inte kan överblicka hela lösningen. Arbete med sådana här typer av problem skapar erfarenheter för hur man kan göra ansatser inför det mer komplexa (målet på sikt är naturligtvis att eleverna själva ska bli förtrogna med att börja nysta upp öppna problemställningar). En annan didaktisk poäng är att problemstrukturen uppmuntrar elever att nå längre. Delproblemen konkretiserar utvecklingssteg.

Låt oss studera matematiken i problemet. Den naturligaste strategin är möjligtvis att tillämpa Pythagoras sats, dess omvändning. Det gäller då att visa att $|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2$, då vi låter C vara skärningspunkten på/med y-axeln. Här kan man tillämpa avståndsformeln. Det går även att ta fasta på att $|AC|^2=|AO|^2+|OC|^2$ och $|BC|^2=|BO|^2+|CO|^2$, enligt Pythagoras sats, där O betecknar origo. Detta leder till villkoret $|AB|^2=|AO|^2+|BO|^2+2|CO|^2$ för ortogonalitet. Med denna ingång så blir kvadreringsregeln och lösning av andragradsekvationer de centrala komponenterna. En alternativ strategi är att utnyttja kriteriet för riktningskoefficienterna, för att två räta linjer ska vara ortogonala. Triangeln ABC är alltså rätvinklig precis då $k_A \cdot k_B=-1$, där k_A och k_B är riktningskoefficienterna för linjerna innehållande sträckorna AC respektive BC.

Problemet fångar alltså upp många centrala komponenter i kurs 2. Det följer att $ab = -1$ är såväl ett nödvändigt som tillräckligt villkor för att $f(x) = (x - a)(b - x)$ ska vara rätvinklig (speciellt innebär villkoret att a och b måste ha olika tecken, som sig bör). Notera även att problemet kan mjukas upp genom att tillåta en tillämpning av exempelvis Geogebra i undersökningen. Speciellt är glidarfunktionen i programmet ett effektivt verktyg i samband med delproblem d. Naturligtvis bör vi uppmuntra eleverna till att bekräfta sina skärmobservationer algebraiskt.

Stödmaterial

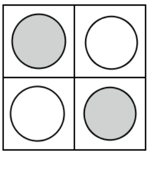
Under 2015 var jag med och arbetade fram Skolverkets stödmaterial *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik.* Frågan hur vi möter denna elevgrupp kan inte separeras från frågan hur vi möter svagare elever, då verkligheten innebär att de befinner sig i samma klassrum. I stödmaterialet föreslog jag just den differentierade problemform som jag exemplifierat ovan och även i artikeln *Spetsutbildning i matematik vid Hvitfeldtska gymnasiet.* Detta sådde ett frö hos mig till att ta fram ett underlag för sådana aktiviteter och fröet växte till en bok, *Undersökande matematik*. Här finner du kursplanenära differentierade problem för samtliga gymnasiekurser, samt för inledande högskolekurser. Flera av problemen är även tillämpbara i grundskolans senare del. Att problemen är tydligt kopplade till kursplanerna är viktigt, då undervisningstiden för kurserna är knapp.

Jag tänker mig att hela elevgruppen arbetar med en handfull differentierade problem i varje kurs. Det kan även vara lämpligt att emellanåt sticka till enskilda elever ett problem. Jag tänker på högpresterande och särskilt begåvade elever som behöver stimulans och utmaning. Den differentierade problemformen gör att eleven själv kan arbeta sig in i problemet, problemstrukturen skapar med andra ord lättintegrerade aktiviteter i undervisningen. Ett tredje sätt att tillämpa problemen på, är att du som lärare går igenom de första delproblemen med hela gruppen, varpå du sedan skickar med eleverna det, eller de, sista delproblemet, som de som vill får försöka lösa på egen hand. På detta sätt vänder du dig samtidigt till elever på olika nivåer.

Jag avslutar med att ge ytterligare två exempel på differentierade problem från boken, där även lösningsförslag presenteras. Det första problemet är relevant för Matematik 1bc och årskurs 9, medan det andra som kretsar kring begreppet geometrisk summa är lämpligt för Matematik 5 och inledande kurser på högskolan.

Differentierat problem 2

Antag att du har $2n$ brickor, n svarta och n vita, där $n \geq 2$. Du drar slumpmässigt fyra brickor, av de $2n$ brickorna, och placerar dem slumpmässigt på det kvadratiska 2×2-brädet nedan. Det här problemet handlar om att undersöka sannolikheten $P(n)$ att varje rad och varje kolumn i brädet innehåller en bricka i varje färg. I figuren nedan ser du ett exempel på en sådan brickplacering.

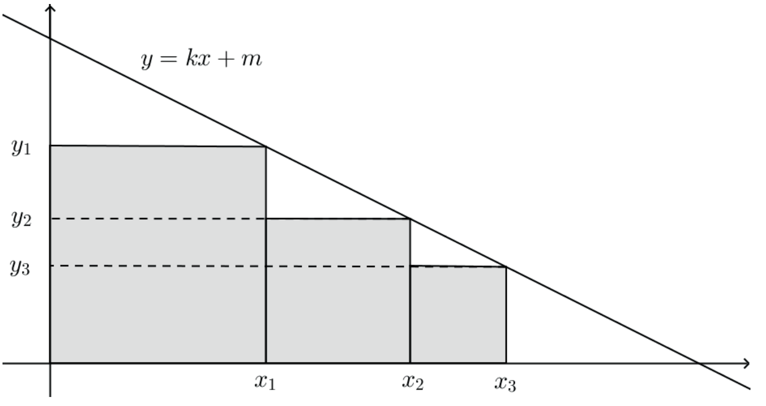


a) Bestäm P(2).
b) Bestäm P(3).
c) Bestäm P(10).
d) Undersök ett uttryck för $P(n)$.
e) Vad kan sägas om $P(n)$ då n är stort?

Undersökningen kan här gärna kompletteras med egna försök. Låt eleverna undersöka relativa frekvenser, säg med $n = 10$.

Differentierat problem 3

En given rät linje har ekvationen $y = kx + m$ där $m > 0$ och $k < 0$. Under linjen så inskrivs successivt (ett oändligt antal) intilliggande kvadrater, enligt figuren. (I figuren är de tre första kvadraterna inritade.) Den sammanlagda arean för (de oändligt antal) kvadraterna betecknas A_K. Det här problemet handlar om att undersöka hur stor kvadraternas gemensamma area A_K är i förhållande till arean A_T av triangeln som begränsas av koordinataxlarna samt den givna linjen.



a) Bestäm arean $A_k(n)$, för n inskrivna kvadrater, då $m = 1$ och $k = -1$.
b) Bestäm A_K/A_T i fallet då $m = 1$ och $k = -1$.
c) Bestäm A_K/A_T i fallet då $m = 2$ och $k = -1$.
d) Bestäm A_K/A_T i fallet då $m = 1$ och $k = -2$
e) Undersök hur förhållandet A_K/A_T beror på k och m.

I båda problemen handlar det om att studera specialfall för att på så vis närma sig det mer allmänna. En del elever kommer att vilja ge sig på huvudproblemet, det allmänna, direkt. Här rekommenderar jag att eleven ombeds reflektera över hur hans eller hennes generella resultat löser föregående delproblem. Denna reflektion, och prövning, ger liv åt resultatet och förankrar möjligtvis förståelsen från arbetet.

LITTERATUR

Eriksson, C. & Petersson, H. (2015). *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik*. Finns som pdf på Skolverkets webbplats.

Petersson, H. (2016). *Spetsutbildning i matematik vid Hvitfeldtska gymnasiet*. Nämnaren 2016:2.

Petersson, H. (2017). *Undersökande matematik*. Lund: Studentlitteratur.