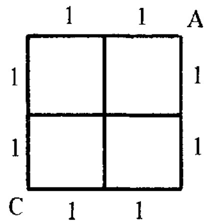
Problem avdelningen

Av problemen i detta nummer har vi fått sex stycken från *Jan Unenge,* som bearbetat problem från Arithmetic Teachers matematikolympiad för elever i högst årskurs sex.

Tre likartade geometriska problem kommer från *Sven-Erik Widebrant.* Det första bör kunna lösas av elever i åk 9, de andra två är något besvärligare. Dessutom ger *Per Häggmark* exempel på hur ett problem kommer till.

1216
Skriv siffrorna 1, 1, 2, 2, 3, 3 som ett sexsiffrigt tal så att ettorna skiljs av en siffra, tvåorna skiljs av två siffror och treorna av tre siffror.



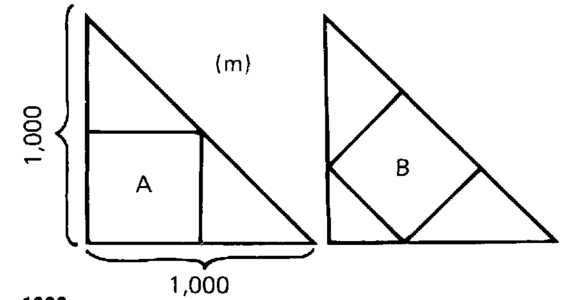
1217
Figuren föreställer ett vägnät. Varje vägdel är 1 km. På hur många olika sätt kan man gå från A till C om den totala vägsträckan skall vara 4 km?

1218
Vilket är det minsta tal som:
om det divideras med 4 får en rest på 1
om det divideras med 5 får en rest på 2
och om det divideras med 6 får en rest på 3?

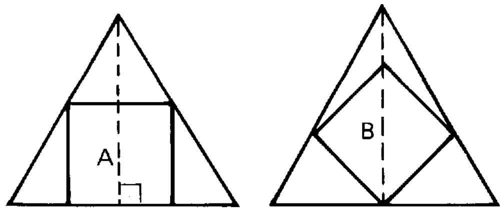
1219
"Min pappas ålder är samma som min mammas ålder om man kastar om siffrorna. Summan av deras åldrar är 99 år och pappa är 9 år äldre än mamma. Hur gamla är de?"

1220
Den sista fredagen i en månad är den 25:e. På vilken veckodag inföll den 1:a i den månaden?

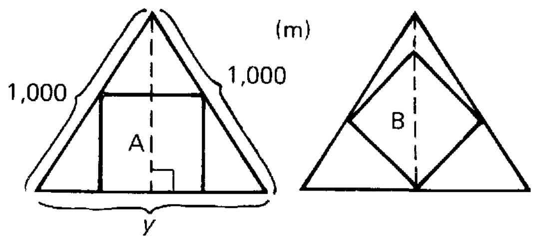
1221
$D = 1 + 3 + 5 + \ldots + 99$
$N = 2 + 4 + 6 + \ldots + 98$
Vilket tal är störst, D eller N? Hur stor är skillnaden?



1222
Trianglarna är kongruenta. Hur många procent större är arean av kvadrat A än arean av kvadrat B?



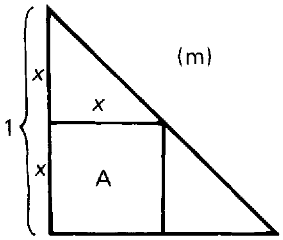
1223
Trianglarna är liksidiga och lika stora. Hur många procent större är arean av kvadrat A än arean av kvadrat B?

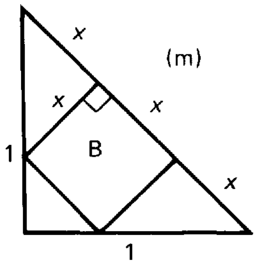


1224
Trianglarna är kongruenta. Beräkna sidan y så att kvadraterna A och B får lika stora areor!

Svar till problemen

1216 312132 eller 231213.
1217 Sex vägar.
1218 57.
1219 45 och 54 år.
1220 På en tisdag.
1221 D är störst. Skillnaden är 50.





1222

Antagande: se figur

$x + x = 1$

ger

$x = \frac{1}{2}$

och kvadratarean $\frac{1}{4}$ m^2

(likformighet utnyttjas här och i det följande)

Antagande: se figur

Pythagoras' sats ger att hypotenusan är $\sqrt{2}$

$x + x + x = \sqrt{2}$

som ger

$x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

och kvadratarean $\frac{2}{9}$ m^2

Sökt andel:

$$\frac{\frac{1}{4} - \frac{2}{9}}{\frac{2}{9}} = 12{,}5\ \%$$

1223

Antagande: se figur

Pythagoras' sats ger

$\overline{TS} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$

Likformighet ger

$$\frac{y}{\frac{x-y}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}}$$

som ger

$y = x(2\sqrt{3} - 3)$

och kvadratarean

$x^2(21 - 12\sqrt{3})$ a.e.

Antagande: se figur

Pythagoras' sats ger

$\overline{QR} = a\sqrt{3} = \overline{RS}$

eftersom Λ QSR = 45°C

Alltså

$\overline{PS} = a + a\sqrt{3} = \frac{x}{2}$

som ger

$a = \frac{x}{2\sqrt{3} + 2}$

$\overline{PQ} = 2a = \frac{x}{\sqrt{3} + 1}$

och

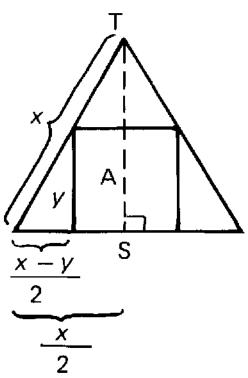
$\overline{QT} = \overline{QV} = \frac{x(3 - \sqrt{3})}{2}$

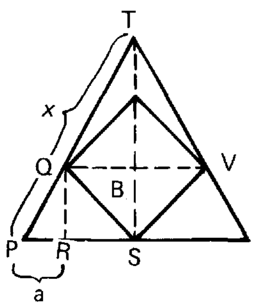
Kvadratarean:

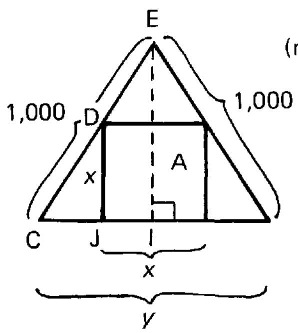
$$\frac{\overline{QV}^2}{2} = \frac{x^2(3 - \sqrt{3})^2}{8} = \frac{3x^2(2 - \sqrt{3})}{4} =$$
$$= 0{,}75x^2(2 - \sqrt{3})$$

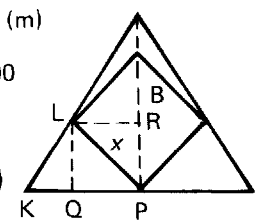
Sökt andel är:

$$\frac{x^2(21 - 12\sqrt{3}) - 0{,}75x^2\,(2 - \sqrt{3})}{0{,}75x^2(2 - \sqrt{3})} \approx 7{,}2\ \%$$









1224

Antagande: se figur

$$\overline{CJ} = \frac{y-x}{2}$$

och Pythagoras' sats ger att

$$\overline{LR} = \overline{QP} = \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Alltså är

$$\overline{KQ} = \frac{y}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$\Delta CJD \sim \Delta KQL$ vilket ger

$$\frac{\frac{y-x}{2}}{x} = \frac{\frac{y}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}}{\frac{x}{\sqrt{2}}},$$

$$x = y(\sqrt{2} - 1)$$

Likformighet ger sedan att

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CJ}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{CI}}$$

Alltså

$$\frac{\overline{DC}}{\frac{y-x}{2}} = \frac{1}{\frac{y}{2}}$$

som ger

$$\overline{DC} = \frac{y-x}{y}$$

Pythagoras' sats tagen på Δ CJD ger

$$x^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y-x}{y}\right)^2$$

Ersättes nu x med $y(\sqrt{2} - 1)$ så kan y lösas ut

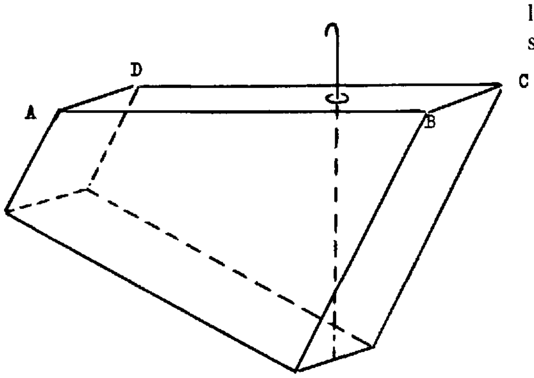
$$y = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1{,}15 \text{ (m)}.$$

Sträckan är 1,15 m.

Ett problem kommer till

PER HÄGGMARK

Emballaget till en skrivbordslampa skall kastas i containern för skräp. Jag tvekar ett ögonblick och betraktar förpackningen som är ett rakt fyrsidigt prisma. Bottenytan är en parallelltrapets med två räta vinklar. Två förpackningar av detta slag bildar tillsammans ett rätblock.



Borde jag kanske spara denna utmärkta låda av kartong och använda den i undervisningen? Skall jag låta elever beräkna lådans begränsningsarea och volym? Nej, det verkar inte särskilt spännande.

Jag kommer plötsligt att tänka på den märkligt formade behållaren för färskvatten i min barndoms segelbåt och idén till ett intressantare problem föds.

Jag bestämmer mig för att visa upp lådan för lärarkandidaterna på M-linjens tillvalskurs och säga ungefär följande.

Det ni ser här är en modell till en bensintank för en båt. (Bensin verkar mer engagerande än vatten.) Då båten är stilla är den här ytan vågrät. (Jag pekar på rektangeln ABCD, se figuren.) Ni skall nu gradera en mätsticka så att man lätt kan avgöra hura många *liter* bensin det *finns kvar* i tanken vid olika tillfällen. Vad behöver man veta om tanken för att kunna lösa graderingsproblemet? Analysera denna fråga och välj sedan *lämpliga* mätetal för de kanter eller andra sträckor som måste vara kända. Lös därefter graderingsuppgiften.

Har Du, käre läsare, något förslag till lösning av denna uppgift, så sänd in den till Nämnaren!