KÄNGURU SIDAN

Geometri – bra för resonemang och problemlösning

I förra numret redovisade vi erfarenheter från årets Kängurutävling. Här koncentrerar vi oss på geometriproblem. Nästan en tredjedel av problemen 2016 hade geometrisk anknytning, men det skiljer något mellan de olika tävlingsklasserna, på Student fanns det elva geometriuppgifter medan det på Junior bara var fem.

Geometriproblemen har under årens lopp alltid haft relativt låg lösningsfrekvens och så var fallet även på flera av årets uppgifter. Eftersom vi vet att många har svårt med dessa problemen är vi angelägna att varje år erbjuda flera sådana som ni kan arbeta med i klassen efter tävlingen.

Många tycker att geometri är svårt och kanske också ointressant. Vad är det för mening att räkna på vinklar och areor? Med intressanta geometriproblem kan vi förhoppningsvis ge en annan bild av geometrin, där resonemang och problemlösning blir det centrala. Att kunna utveckla ett hållbart argument som man får argumentera för är kanske intressantare och mer stimulerande än att endast utföra beräkningar. Förhoppningsvis kan arbete med geometriproblem stimulera undervisningen, till glädje för både elever och lärare.

Problemen på följande sidor kommer från olika tävlingsklasser 2016. Analysera dem tillsammans med dina kollegor och förbered gemensamt lektioner.

Diskutera vilka tänkbara svårigheter som eleverna kan få. Hur tror ni att de kommer att angripa problemet? Vad måste de kunna för att angripa problemet? För att lösa det?

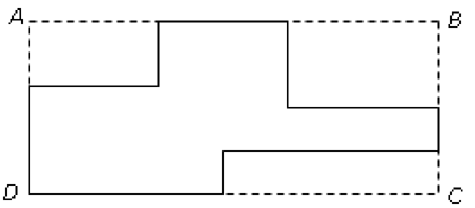
Även om eleverna saknar kunskap om något samband kan de börja lösa problemet och få möjlighet att inse att de saknar kunskap som de behöver. När kan det vara lämpligt att avbryta arbetet för att samla eleverna kring en sådan diskussion?

Vilka matematiska idéer behandlar problemet? Hur kan vi anknyta till andra problem eller sammanhang som eleverna känner till? Hur kan vi utveckla problemet? Tillsammans ser man ofta fler möjligheter så ett sådant gemensamt förberedelsearbete kan göra problemen ännu mer användbara.

När vi väljer problem till tävlingen vet vi att endast få kommer att klara vissa av dem, men vi tar med dem eftersom de är bra problem. Ibland placerar vi dem också i i den del (3-, 4-, 5-poäng) där de passar med tanke på komplexiteten, även om vi inser att de uppfattas som svårare än andra problem i delen. Ett skäl till det är att fler ska få möjlighet att möta dem. Att vi medvetet låter eleverna få problem som vi nog anar att de inte klarar får illustrera skillnaden mellan ett prov, som mäter vad eleverna har lärt sig, och Kängurun som presenterar problem som är intressanta och bra att arbeta med för elever och lärare.

Begreppen *omkrets och area* ger ofta svårigheter. I Ecolier 8 finns en problemtyp som har förekommit i olika varianter på tidigare tävlingar.

E 8. Rektangeln *ABCD* har omkretsen 30 cm. Vi klipper bort tre rektanglar i hörnen (se på bilden). Omkretsen på de tre rektanglarna är sammanlagt 20 cm. Vilken omkrets har den figur som blir kvar?



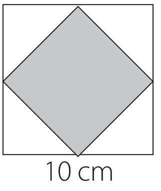
A: 50 cm B: 40 cm C: 30 cm
D: 10 cm E: det kan man inte räkna ut

Knappt 20 % i åk 3 och 4 klarade detta. Hur tänker eleverna? Kanske informationen att man klipper bort leder till att de tänker att det är subtraktion och de två mätetalen ger dem något att utföra beräkningen med.

Detta illustrerar problemet med att leta efter det som brukar kallas signalord, i det här fallet "ta bort". Använd gärna problemet för att diskutera innebörden av begreppet omkrets, utan att utföra beräkningar av den.

Benjamin 9 är också ett klassiskt problem som förekommit flera gånger.

B 9. Katrin ritar en kvadrat med sidlängden 10 cm. Hon drar streck mellan mittpunkterna på sidorna så att det bildas en mindre kvadrat. Vad är arean på den mindre kvadraten?

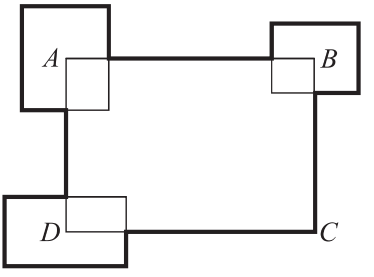


A: 10 cm^2 B: 20 cm^2 C: 25 cm^2
D: 40 cm^2 E: 50 cm^2

För eleverna i åk 5 var denna uppgift en av de svåraste, 12 % av dem vars resultat redovisades klarade den. I åk 6 och 7 låg lösningsfrekvensen på 24 respektive 29 %. Hur resonerar eleverna här? Förmodligen har nästan alla någon gång vikt ett kvadratiskt papper och rent konkret erfarit att den mindre kvadraten är hälften så stor som pappret, dvs att pappret blir dubbelt. Låt eleverna lösa uppgiften konkret, genom att vika ett kvadratiskt papper och resonera sig fram till hur stor arean blir, och dessutom argumentera för sin lösning. Gör detta både med bestämda mått och med okänd längd på sidorna på pappret.

Att Benjamin 19 skulle vara svår anade vi.

B 19. Omkretsen av rektangeln *ABCD* är 30 cm. Tre andra rektanglar placeras som på bilden med centrum i punkterna *A, B* och *D*. Summan av deras omkrets är 20 cm. Hur lång är är den tjocka linjen?

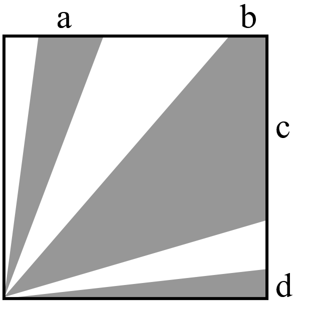


A: 50 cm B: 45 cm C: 40 cm
D: 35 cm E: Omöjligt att avgöra

Endast drygt 10 % har svarat rätt, men intressantare är kanske att det inte är någon skillnad mellan årskurserna 5 till 7. Beräkningarna är antagligen inget problem, de ingående talen är valda så att det ska bli enkelt att räkna. Men varför är problemet så svårt? Diskutera först gemensamt med kollegor och låt sedan eleverna diskutera. Låt dem lösa Ecolier 8 och jämför problemen.

Ungefär en fjärdedel av eleverna klarade Cadet 18.

C 18. I en kvadrat med arean 36 finns det områden som är skuggade, se figur. Sammanlagt har den skuggade ytan arean 27. Hur lång är sträckan $a + b + c + d$?



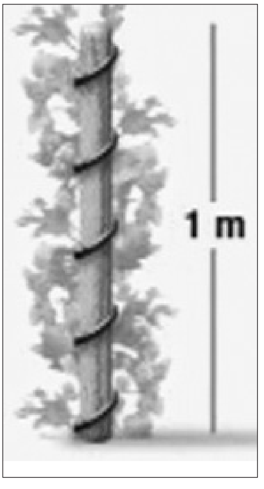
A: 4 B: 6 C: 8 D: 9 E: 10

Det finns olika sätt att resonera sig fram till lösningen. En nödvändig kunskap är hur man beräknar triangelns area. Att kunna använda sig av formeln också i ett annat sammanhang än för att beräkna en given triangels area utifrån givna mått är mer utmanande, men troligen också intressantare.

Junior 17 löste knappt var femte redovisad elev korrekt. Vilka svårigheter möter eleverna här? Vilka begrepp måste de använda? Vad krävs det mer för att de ska finna en lösning?

J 17. En växt slingrar sig exakt fem varv kring en stolpe som har höjden 1 m och omkretsen 15 cm. Varje varv slingrar sig växten lika lång sträcka i höjdled. Hur lång är växten?

A: 0,75 m
B: 1,0 m
C: 1,25 m
D: 1,5 m
E: 1,75 m



Det sista geometriproblemet hämtar vi från Student.

S19. I en rätvinklig triangel *ABC* (den räta vinkeln i *A*) skär bisektriserna till de spetsiga vinklarna varandra i punkten *P*. Vilket är avståndet från *P* till *A* om avståndet från *P* till hypotenusan är $\sqrt{8}$?

A: 8 B: 3 C: $\sqrt{10}$ D: $\sqrt{12}$ E: 4

Detta är ett klassiskt geometriproblem. Ett geometriproblem som bara består av text kan vi angripa genom att rita en relevant figur och markera det som är givet. Vad vet vi om bisektrisernas skärningspunkt i en triangel? Detta är ett bra problem som passar att använda i Ma2-kursen.

Det kommer fler problem

Nu pågår arbetet med nästa års tävling och vi kan lova att det kommer att dyka upp geometriproblem även då.

För att underlätta jakten för lärare på bra geometriproblem har NCM givit ut boken *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. Där finns alla geometriproblem från åren 1999–2008 samlade, sorterade efter innehåll och ordnade i någorlunda stigande svårighetsgrad. Till problemen finns lösningar och kommentarer med förslag för undervisningen. Se mer på http://ncm.gu.se/node/478#geo

Susanne Gennow & Karin Wallby

Kängurun utan gränser

Nu har problemen för nästa års Kängurutävling satts samman. I sex olika arbetsgrupper har lärare och matematiker från ett 60-tal olika länder diskuterat och analyser problem och valt ut de bästa. Dessa ska nu översättas och bearbetas något inför tävlingen genomförs med start

16 mars 2017

Anmäl din klass och låt eleverna först delta i tävlingen och lösa problemen på egen hand. Arbeta sen vidare med problemen på matematiklektioner därefter.

Anmälningssidan öppnar 10 januari, ncm.gu.se/kanguru