

Problem avdelningen



Problemen i detta nummer kommer från Uddevalla. Det är uppgifter från 1984 års upplaga av Ramnerödsskolans matematiktävling. Problemlieferantörer är *Hans Engberg* och *Björn Strömberg*.

1120 *Sant och sänt*

- I denna uppgift finns exakt ett falskt påstående.
- I denna uppgift finns exakt två falska påståenden.
- I denna uppgift finns exakt tre falska påståenden.
- I denna uppgift finns exakt fyra falska påståenden.

Hur många påståenden i denna uppgift är falska?

1121 *Borde vara värt en 5:a*

Genom att leka med siffror och matematiska tecken kan förbluffande resultat uppnås. Det är t ex möjligt att skriva talet 1 med hjälp av fyra 4:or och diverse tecken. Se själv!

$1 = 4 - 4 + 4/4$. Enkelt, eller hur.

Din uppgift blir att skriva samtliga tal 1—10 med hjälp av fem 5:or.

1122 *Kvadrera är stort*

Likheten $x^2 = (x + a)(x - a) + a^2$ kan vara användbar när man skall kvadrera stora tal. Hur man använder likheten framgår av nedanstående exempel.

Beräkna 97^2

I likheten ovan sätter du $x=97$ och $a=3$. Naturligtvis förstår du genast varför man väljer $a=3$. Jaså inte! Jo, $97+3=100$ och multiplikation med 100 brukar inte vålla

några större bekymmer. Nåväl, vad händer? Jo!

$97^2 = (97+3)(97-3) + 3^2$ enligt den första likheten och efter förenkling får du

$$97^2 = 100 \cdot 94 + 9 = 9\,400 + 9 = 9\,409$$

Beräkna nu (gärna med denna metod)

- 994²
- 999 999²
- 100 004²

1123 *Matematiken i hemkunskapen*

Tre kotletter skall grillas. Det tar tre minuter att grilla en kotlett på en sida och grillen klarar bara av två kotletter åt gången.

Vilken tid måste det minst ta för att grilla de tre kotletterna?



1124 *Stryk ska du ha!*

Betrakta de positiva heltalen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . och besvara följande frågor:

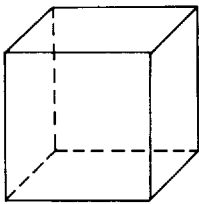
1. Börja med att stryka talet 5. Stryk sedan vart fjärde tal.
2. Vilket är det i ordning sextonde strukna talet?
Kommer talet 125 att strykas?
3. Kommer något tal delbart med 6 att strykas?

Betrakta de jämna talen 2, 4, 6, 8, 10, . . . och besvara följande frågor:

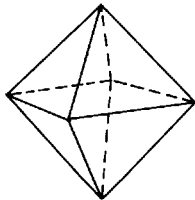
1. Stryk första talet. Hoppa sedan två steg, stryk, hoppa sedan tre steg, stryk, hoppa sedan fyra steg osv. dvs öka ett steg för varje hopp. Vilket är det åttonde talet som stryks?
2. Ange en formel för det n:te talet som stryks.
3. Kommer 1 046 att strykas?

1125 *K(l)antigt värre*

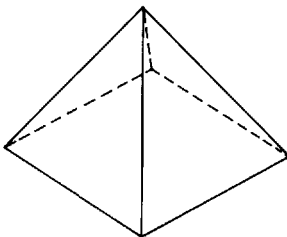
Med hjälp av figurerna nedan skall du försöka lista ut ett enkelt samband mellan antalet sidoytor, hörn och kanter. En god idé är att göra en liten tabell och sedan försöka dra några vettiga slutsatser ur denna.



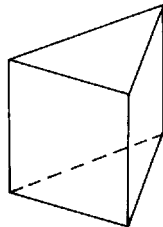
Kub



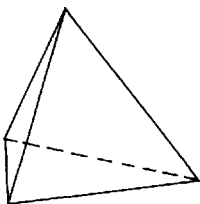
Oktaeder



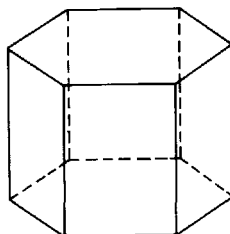
Pyramid



Tresidigt prisma



Tetraeder



Sexsidigt prisma

1126 *Värre än Gauss*

Beräkna summan av de första 1 000 heltalen!

1127 *Lyckan kommer, lyckan går*

Ett positivt heltal säges vara lyckligt om summan av kvadraterna på dess siffror blir 1 eller om en upprepning av proceduren, enligt exemplen ger svaret 1. Övriga tal sägs vara olyckliga.

Exempel 1.

100 är lyckligt eftersom

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1$$

Exempel 2.

23 är lyckligt eftersom

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 \text{ och fortsättning ger}$$

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$$

$$1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$$

Exempel 3.

4 är olyckligt eftersom

$$4^2 = 16$$

$$1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$$

$$3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$$

$$5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$$

$$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$$

$$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$$

$$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$$

$$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$$

Nu kommer allt att upprepas och det är uppenbart att man aldrig kan nå 1.

Din uppgift blir nu att undersöka följande tal och avgöra huruvida de är lyckliga eller olyckliga: 6, 7, 29, 49, 85 och 94.

1128 *I valet och kvalet*

Ur en mängd med n stycken element kan man välja k stycken på

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ olika sätt. } \binom{n}{k} \text{ utläses } n$$

över k .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n.$$

Utläses n -fakultet.

Exempel: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Utläses 5-fakultet.

Använd ovanstående för att lösa följande uppgift:

I en klass med 11 pojkar skall man ta ut ett fotbollslag med sju spelare. På hur många olika sätt kan detta göras?

1129 *Med döden som insats*

Den grymme domaren A Rit Metik hade

dömt den ökände skurken Al Goritm till döden för att denne förfalskat multiplikationstabellen. Al Goritms enda chans att rädda livet hängde på en bestämmelse i landets lagbok, där det stod:

Innan avrättning skall äga rum bäres två urnor fram till den dödsdömde. I varje urna finns 25 vita och 25 svarta pärlor. Den dödsdömde förses med ögonbindel och får sedan välja en pärla ur någon av de två urnorna. Tar den dödsdömde en vit pärla skall han omedelbart friges men råkar han välja en svart pärla skall han omedelbart avrättas.

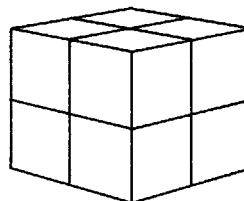


Al Goritm, tidigare elev vid en mycket berömd högstadieskola i Uddevalla, frågade sin domare, A Rit Metik, tidigare rektor vid samma högstadieskola, ifall han fick blanda pärlorna själv, innan han valde en pärla ur någon urna. Domaren, som ej var helt kunnig i sannolikhetslära, beviljade nådigt detta.

Skurken omfördelade pärlorna och lyckades på så sätt höja sin överlevnadschans dramatiskt. Hur bar han sig åt?

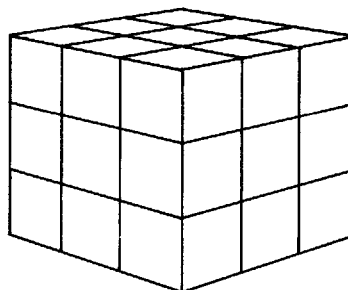
1130 Kubistiskt måleri

Anta att du har åtta tråkuber med 1 centimeters kantlängd. Visa hur de kan målas så att de kan sättas samman till antingen en röd kub med sidan 2 cm eller en lika stor blå kub.



Betrakta nu motsvarande problem med 27 tråkuber med 1 centimeters kantlängd. Kan du måla kuberna så att de kan sättas samman till en röd, en blå eller en gul kub med sidan 3 cm?

Ledning: Ett lämpligt sätt att beskriva färgläggningen av småkuberna är att låta $R_3B_2G_1$ beteckna en kub med tre röda, två blå och en gul sidoyta. $R_2B_2G_2$ betecknar givetvis då en kub med två röda, två blå och två gula sidoytor. Då en av de små kuberna har två eller fler sidoytor av samma färg måste dessa alltid vara angränsande.



Lösningar till problemen

1120 Tre falska påståenden.

1121 Här redovisas möjliga lösningar. Det finns fler!

$$1 = \frac{5+5}{5} - \frac{5}{5}$$

$$2 = \frac{5+5}{5} + 5 - 5$$

$$3 = 5 - \frac{5}{5} - \frac{5}{5}$$

$$4 = \frac{5+5+5+5}{5}$$

$$5 = 5 + 5 + 5 - 5 - 5$$

$$6 = \frac{5 \cdot 5}{5} + \frac{5}{5}$$

$$7 = 5 + \frac{5}{5} + \frac{5}{5}$$

$$8 = 5 + 5 - \frac{5+5}{5}$$

$$9 = \frac{5 \cdot 5 - 5}{5} + 5$$

$$10 = 5 \cdot 5 - 5 - 5 - 5$$

- 1122 a) $994^2 = 988036$
 b) $999999^2 = 999998000001$
 c) $100004^2 = 10000800016$

1123 Nio minuter.

1124 1,2,3,4,5,6,7, . . .

Talen som stryks är av formen

$$5 + 4 \cdot n \text{ där } n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

Sextonde talet som stryks är

$$5 + 4 \cdot 15 = 65.$$

Finns det något n så att

$$5 + 4 \cdot n = 125?$$

$n = 30$ uppfyller villkoret.

Inget tal delbart med 6 stryks.

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$$

Talen som stryks är av formen

$$n(n+1) \text{ där } n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

$$n = 8 \text{ ger } 8(8+1) = 8 \cdot 9 = 72$$

Åttonde talet som stryks är 72.

Det finns inget n sådant att

$$n(n+1) = 1\ 046.$$

1125 Antal hörn plus antal sidoytor minus antal kanter är lika med två.

1126 Summan blir 500500.

Jämför med addition av talen ett till tio.

$$(1+9) + (2+8) \text{ osv.}$$

1127 Lyckliga tal är 7, 49 och 94.
 Olyckliga tal är 6 och 29.

1128 Med $n = 11$ och $k = 7$ får man:

$$\binom{n}{k} = \frac{11!}{7!(11-7)!} = 330$$

1129 Han lade en vit kula ensam i en urna och de övriga i den andra. Chansen att överleva ökade på detta sätt till nära 75 %.

1130 I kuben med åtta småkuber målas varje liten kub med tre röda och tre blå sidor. Utgå från ett hörn och måla de tre sidoytor som ansluter till hörnet i samma färg. I kuben med 27 småkuber målas:

6 st $R_2 B_2 G_2$

3 st $R_3 B_2 G_1$

3 st $R_3 B_1 G_2$

3 st $R_2 B_3 G_1$

3 st $R_2 B_1 G_3$

3 st $R_1 B_3 G_2$

3 st $R_1 B_2 G_3$

1 st $R_3 B_3$

1 st $B_3 G_3$

1 st $R_3 G_3$

Glöm inte



Svenska Matematikersamfundets

UTBILDNINGSDAG 85

lördag 23 mars i Linköping

För organisationskommittén

Göran Andersson Peder Claesson Lars Inge Hedberg Jaak Peetre

Kontaktman

Peder Claesson, Institutionen för lärarutbildning, Linköpings universitet,
581 83 LINKÖPING.

Tel 013-13 29 59