

Problem avdelningen

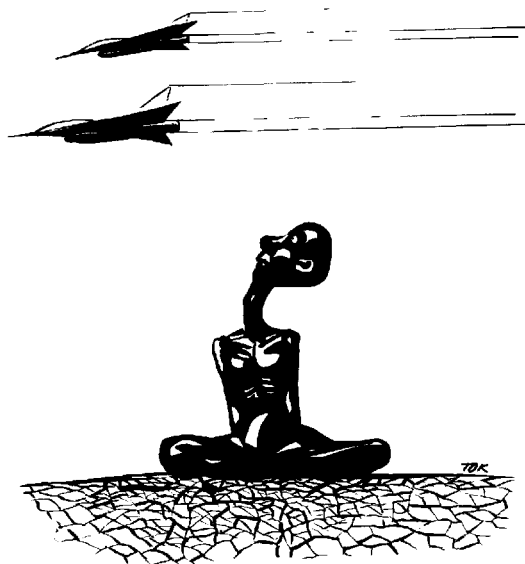


Problemavdelningen får från och med detta nummer en något annorlunda utformning. Svar (och lösningar) presenteras i *samma* nummer som problemen. Vår tanke är att det skall bli lättare att använda problemen i undervisningen. Vi blir dock mycket glada om ni skickar in synpunkter på problemen, eller berättar hur ni använder dem i undervisningen! Sänd gärna nya, roliga, trevliga problem!

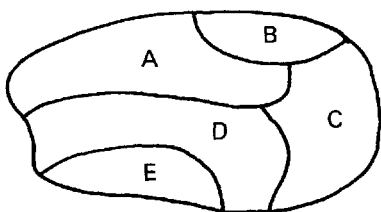
1101 Räkna ut något intressant med hjälp av uppgifterna nedan. Skicka gärna ett kort eller brev till oss och berätta vad ni räknade ut!

Världens totala rustningskostnad/år (vapen, militär m m)	3 500 miljarder kr
Världens totala hjälp till de fattiga länderna/år	150 miljarder kr
Ett Viggen-flygplan	25 miljoner kr
Årslönen för en lärare i Bangladesh	1 500 kr
Svenska försvarets kostnad/år	20 miljarder kr
Sveriges folkmängd	8,3 miljoner människor
Världens folkmängd	4,6 miljarder människor
Spannmålsproduktion i världen/år	2 200 miljoner ton
Fiskfångst i världen/år	75 miljoner ton
Energiinnehåll i 1 kg spannmål	13 000 kJ
Dagsbehov per person	8 000—15 000 kJ

Siffrorna är hämtade ur material från SCB och SIDA.

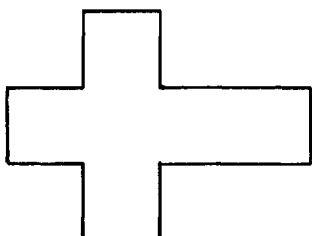


- 1102 a) Vilket är största antalet skärningspunkter för 3 räta linjer?
 b) 4 räta linjer?
 c) 21 räta linjer?
- 1103 Lotta och Lena skall springa 3 varv var på en motionsslinga som är 3 km. Flickorna springer olika fort och åt var sitt håll. När de möts första gången har Lena sprungit 1,0 km.
 a) Vem springer fortast?
 b) Hur mycket fortare springer hon?
 c) Hur många gånger kommer de att mötas?
- 1104 Hur många färger måste du minst ha för att kunna färglägga kartan, om två länder som gränsar till varandra inte får ha samma färg?

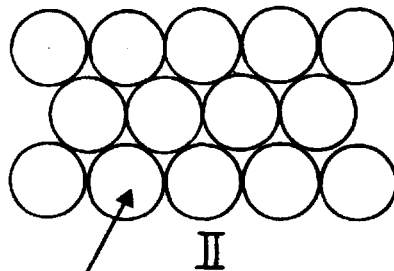
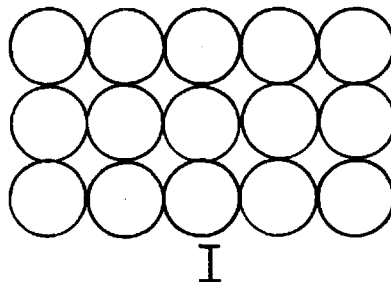


Kan du rita en karta till vilken man måste ha fler färger? Hur många färger då? Byt gärna karta med en kamrat och testa varandras!

- 1105 I kylaren på en bil finns en blandning av glykol och vatten. Vår kylare har volymen 5,0 l. Låt oss säga att vi har en kylarblandning av 50 % vatten och 50 % glykol (volympocent), och i stället vill ha 70 % vatten och 30 % glykol. Då tappar vi först ur en del av kylarblandningen och fyller sedan på vatten. Hur mycket skall vi tappa ur?
- 1106 Kan man vika ihop denna figur till en kub? Finns det andra figurer som också går att vika ihop till en kub? Finns det någon figur man kan vika ihop till en tetraeder ("fästis")? Hitta gärna på egna figurer!

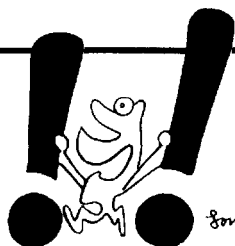


- 1107 Mellan Mölndal och Göteborg går det bussar med 15 minuters mellanrum. Det skall enligt turlistan ta 26 minuter från ändhållplats till ändhållplats.
 a) Hur många bussar måste bussbolaget minst använda för att klara tidtabellen?
 b) Hur många bussar behövs om chaufförerna skall ha 7 minuters rast vid varje ändhållplats?
- 1108 Dessa två teckningar visar två olika packningsvarianter av metallatomer i en metallbit.



Metallatom med radien $0,128 \cdot 10^{-9}$

- a) Hur mycket skiljer det i höjd mellan de två varianterna, om man räknar på tre atomlager?
 b) Ungefär hur många atomlager är det i en plåt som är 1,00 mm om man staplar enligt variant I resp variant II (atomradien är $0,128 \cdot 10^{-9}$ m)?
- 1109 Olof, som alltid har bråttom, går uppför en rulltrappa med en fart av 1 steg per sekund. Efter 20 steg har han nått toppen av rulltrappan. Nästa dag går han uppför samma rulltrappa med en fart av 2 steg per sekund, och då når han toppen efter 32 steg. Hur många trappsteg är det i rulltrappan?



Hans Moos, Västra Frölunda, och Roland Munther, Uppsala, har skickat in lösningar till problemen i nr 3, 83/84. De får var sin bok. Grattis!

1031 *Triangelstal*, som också är *kvadrattal*:

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900,
1631432881.

1032 *Vänskapligt sinnade par* är:

1210 och 1184, 2620 och 2924,
6232 och 6368, 18416 och 17296.

1033 Se på siffrorna från höger i potenserna av 5.

$n=1$ entalssiffra
 $n=2$ tiotalssiffra
 $n=3$ hundratalssiffra

osv.

Man ser att för

$n=1$ fås siffran 5

$n=2$ fås siffran 2

$n=3$ siffrorna 1 och 6

$n=4$ siffrorna 3, 5, 8, 0

osv.

Periodlängd

1

1

2

4

Siffrorna som fås för varje n återkommer med en viss periodlängd.

Allmänt sett fås för $n \geq 2$ periodlängden = 2^{n-2}

Man kan jämföra med potenser av 2, där man för $n \geq 1$ får periodlängden = $4 \cdot 5^{n-1}$.

1034 Alla talen $\frac{16}{64}, \frac{166}{664}, \frac{1666}{6664}, \frac{16666}{66664}, \dots$

kan skrivas som $\frac{15a+1}{60a+4}$, som kan förkortas till $\frac{1}{4}$.

1035 a) Summan = 2,25

b) Summan = 16

c) Man får summan som differensen av två oändliga geometriska serier,

$$\text{Summan} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

$$S_{4000} = 1 - \frac{1}{4001} = \frac{4000}{4001}$$

1036 Här kommer några exempel:

a	b	c	d
2	8	3	5
4	0	3	7
7	9	1	8
4	10	3	7
1	5	2	3
1	13	2	9

För alla dessa exempel utom det sista gäller att $b=c+d$ och $d=c+a$.

För $a \geq 1, c \geq 1, b=c+d, d=c+a$ fås

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2} = \frac{a^2+(2c+a)^2}{c^2+(c+a)^2} = \frac{2a^2+4ac+4c^2}{a^2+2ac+2c^2} = 2$$

$$\text{T ex: } \frac{1^2+5^2}{2^2+3^2} = 2, \frac{1^2+7^2}{3^2+4^2} = 2, \frac{2^2+8^2}{3^2+5^2} = 2$$

1037 Här är en uppräknings av Nivalent:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, ...

Niventvillingar: 20 och 21, 80 och 81, 152 och 153, 201 och 202, 209 och 210, 224 och 225, 399 och 400.

Niventrillingar: 110 111 112.

Exempel på en oändlig följd: 10, 100, 1 000, 10 000, ...

1038 Om miniräknaren vänds upp och ned står det: *Ligghiss*.

Lösningar till problemen i nummer 1, årgång 11

- 1102 a) 3 st b) 6 st
 c) 210 st (En linje skär de övriga 20 i högst 20 punkter.
 21 linjer skär de övriga 20 i högst $\frac{21 \cdot 20}{2}$
 punkter, eftersom varje skärningspunkt hör till två linjer.)

- 1103 a) Lotta. Hon springer 2,0 km då Lena springer 1,0 km.
 b) Dubbelt så fort.
 c) 4 ggr. Varje gång de möts har de tillsammans sprungit ett helt antal varv.

Möte	Lotta	Lena	Lotta + Lena
1	2,0 km	1,0 km	3,0 km
2	4,0	2,0	6,0
3	6,0	3,0	9,0
4	8,0	4,0	12,0

Det 5:e mötet blir aldrig av, ty Lotta slutar efter 9 km.

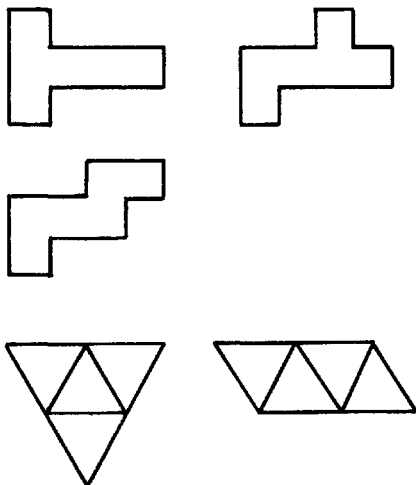
- 1104 3 st

- 1105 2,0 liter
 2,5 l vatten från början, x liter kylarblandning tappas ur, $\frac{x}{2}$ l vatten tappas ur, x l vatten hålls i.

$$2,5 - \frac{x}{2} + x = 0,70 \cdot 5$$

$$x = 2$$

- 1106 Ja, det kan man! Det finns många varianter. Här ges några:



Utförligare diskussion finns i *Laborativ Geometri* av Per Häggmark, lärarhögskolan i Mölndal.

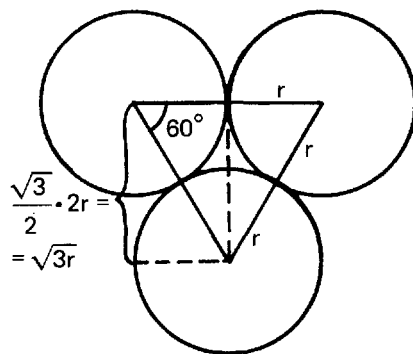
- 1107 a) 4 bussar b) 5 bussar

Exempel:

12.00	1:a bussturen
12.15	2:a
12.30	3:e
12.45	4:e
13.00	5:e
13.15	6:e

- a) 12.52 är första bussen tillbaka, dvs 1:a bussen kan köra 5:e bussturen osv.
 b) 13.06 är 1:a bussen tillbaka, dvs 1:a bussen kan köra 6:e bussturen osv.

- 1108 a) $4r - 2\sqrt{3}r \approx 6,9 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
 3 lager variant I: $3 \cdot 2 \cdot r = 6r$
 3 lager variant II: $r + 2 \cdot \sqrt{3}r + r = 2r + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r$ (se figur!)
 Differensen: $6r - 2r - 2\sqrt{3} \cdot r = 4r - 2\sqrt{3} \cdot r$.



- b) Variant I:

$$\frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 0,128 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 3,9 \cdot 10^6$$

Ungefär 3,9 miljoner lager

Variant II:

Ett atomlager har höjden $\sqrt{3}r$ (se figur! De två yttersta lagren försummas)

$$\frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{\sqrt{3} \cdot 0,128 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \approx 4,5 \cdot 10^6$$

Ungefär 4,5 miljoner lager.

- 1109 S är antalet trappsteg, r är rulltrappans hastighet i steg per sekund.

$$S = 20r + 20$$

$$S = 16r + 32$$

$$S = 80$$

80 trappsteg