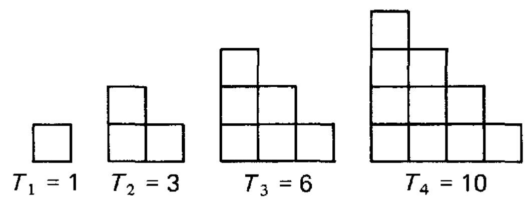
Från triangeltal till pyramidtal — och kanske vidare

AAGE BONDESEN

Kanske har du stött på triangeltal och liknande figurerade tal. Sådana talframställningar tas med jämna mellanrum upp av matematikdidaktiker. Bland annat har det förekommit en artikel av Aage Bondesen i den danska tidskriften MATEMATIK, nr 4/1982. För översättningen till svenska svarar Bo Rosén.

Triangeltal

Triangeltal kan åskådliggöras som trappor av enhetskvadrater. De är uppbyggda som i nedanstående figur.

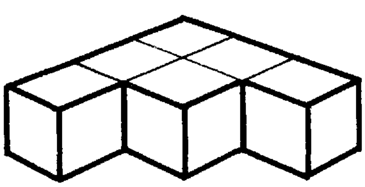


$T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, osv.

Uppenbarligen kan man också skriva dem på följande sätt:

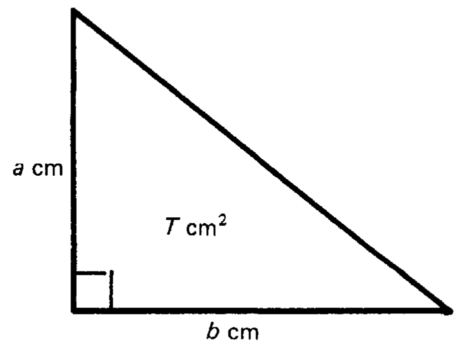
$$T_1 = 1$$
$$T_2 = 1 + 2$$
$$T_3 = 1 + 2 + 3$$
$$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$T_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

Man kan lägga dem med hjälp av enhetskuber.

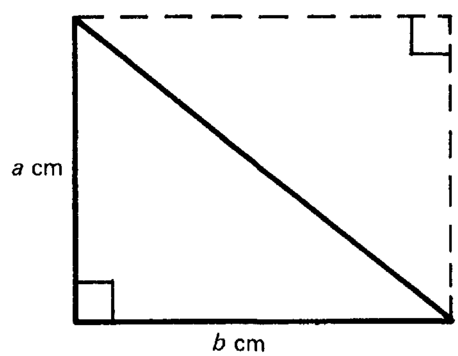


och kanske önskar vi en formel för T_n. En geometrisk lösning av detta problem kan se ut så här.

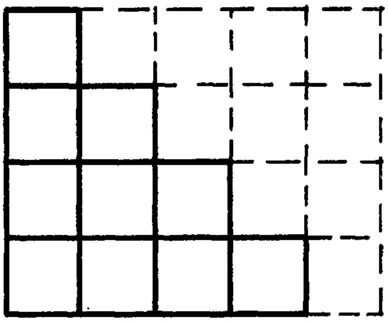
Låt oss ta T_4-trappan. Den liknar en rätvinklig triangel.



Hur bestämmer vi arean på T? Vi kan fylla ut triangeln till en rektangel.



och vi ser att $T = \dfrac{a \cdot b}{2}$. Något liknande kan vi göra med T_4-trappan.



Vi ser då att $T_4 = \frac{4 \cdot 5}{2}$. Metoden är sådan att man kan genomskåda att generellt måste gälla

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

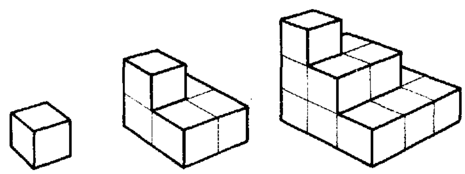
och alltså

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Detta kan man lämpligen åskådliggöra med hjälp av enhetskuber som i figurerna ovan.[1]

Pyramidtal

Pyramidtal kan åskådliggöras som pyramider av enhetskuber, uppbyggda enligt nedanstående figur.



$P_1 = 1$ $\quad$ $P_2 = 5$ $\quad$ $P_3 = 14$

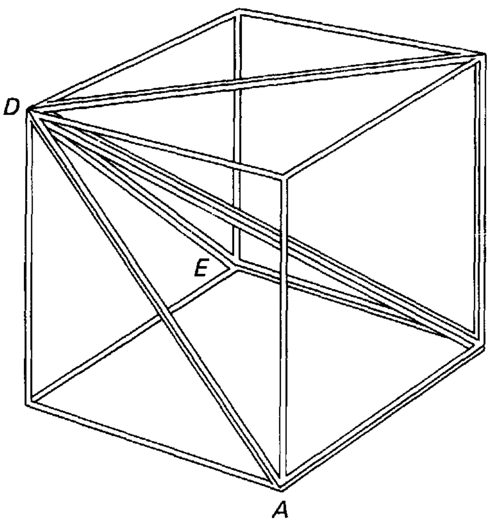
$P_1 = 1$, $P_2 = 5$, $P_3 = 14$, osv.

De kan också definieras på följande sätt:

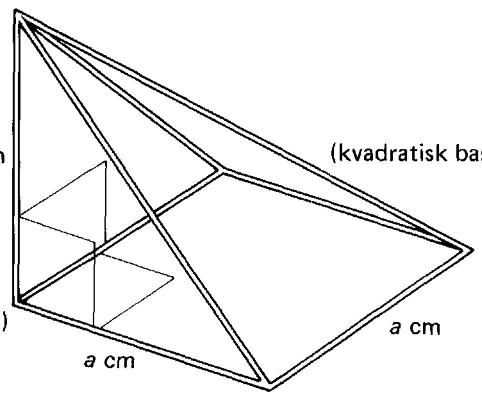
$$P_1 = 1^2$$
$$P_2 = 1^2 + 2^2$$
$$P_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$
$$\ldots\ldots$$
$$P_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Formeln för P_n är lite svårare att finna än den för T_n. Ibland har jag fått min klass att komma igång på följande sätt.

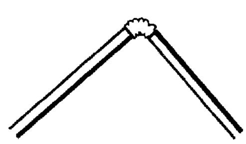
Jag visar fram en tärning, som jag har tillverkat av gula, blå och röda sugrör. Vid en första anblick kan den verka en aning förbryllande.



Den är sammanbunden med segelgarn vid A, B, C, D och E och jag ber dem att lösa upp de 5 segelgarnsknutarna. Det visar sig, när alla är uppknutna, att tärningen delas i tre lika byggda pyramider, en gul, en blå och en röd.



De fyra sugrör, som går till ett och samma hörn, är sammanfogade två och två med hjälp av piprensare som visas i figuren nedan. De två piprensarhörnen är sinsemellan sammanbundna med sytråd.

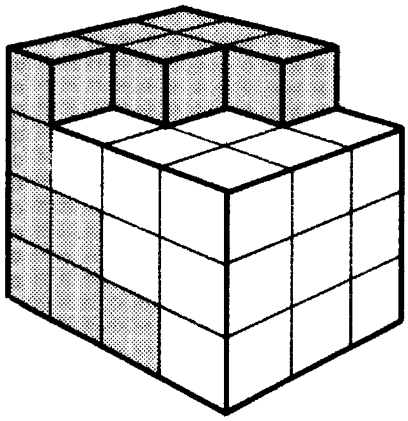


Det är en bra uppgift att beräkna längden av de olika sugrören i figuren ovan.

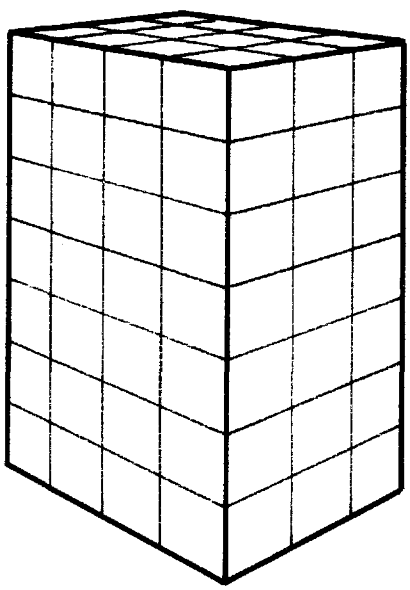
Experimentet övertygar oss om att pyramiden har volymen $\frac{1}{3} \cdot a^3$ cm^3 (och stärker oss i tron att formeln för pyramidens volym gäller).

[1] Jämför Bengt Ulins behandling i nr3, s 36.

Inspirerade, dels av vår framgång med T_n, dels av vårt pyramidförsök, försöker vi nu att sätta samman tre P_3-pyramider till något tärningsaktigt. Detta lyckas inte helt, men vi kan dock presentera följande.



Vi ser att två sådana figurer kan sättas samman till ett rätblock som detta



med volymen $3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3+1)$.

Figurerna ska dock inte vara helt lika. Sammanfogningen lyckas bara om de är varandras spegelbilder (som höger och vänster hand).

Den sammansatta figuren innehåller sex P_3-pyramider, så vi inser, att var och en av dessa har volymen

$$P_3 = \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3+1)}{6}$$

Metoden är sådan, att man kan genomskåda att det generellt måste gälla

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

och alltså att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n\,(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

Då intresset för dessa saker börjar att vakna är man kanske mogen för en annan (icke-geometrisk) utveckling av (2), till exempel följande.

Som bekant gäller för varje tal x

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

dvs

$$(x+y)^3 - x^3 = 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \qquad (3)$$

I den sista formeln sätter vi $y=1$ och i tur och ordning $x = 1, 2, \ldots, n$.
Vi får då

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\
&\;\ldots\ldots \\
(n-1)^3 - (n-2)^3 &= 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Adderas dessa likheter så försvinner de flesta leden på vänster sida.
Kvar blir bara

$$(n+1)^3 - 1^3$$

På höger sida fås uppenbarligen

$$3P_n + 3T_n + n$$

Vi har alltså

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3P_n + 3T_n + n$$

Nu är det dessutom så, att om man sätter in $x=1$ och $y=n$ i (3) får man

$$(1+n)^3 - 1^3 = 3n + 3n^2 + n^3$$

De två sista formlerna ger tillsammans

$$3n + n^2 + n^3 = 3P_n + 3T_n + n \qquad (4)$$

Antag nu, att man är i följande situation. Man har härlett formel (1), vilket var rätt lätt, men inte nått fram till (2). Vi önskar en formel för P_n. Den kan då fås ur (4).

$$P_n = \frac{1}{3}(3n + 3n^2 + n^3 - 3T_n - n) =$$
$$= \frac{1}{6}(6n + 6n^2 + 2n^3 - 6\frac{n(n+1)}{2} - 2n)$$
$$= \frac{1}{6}(6n + 6n^2 + 2n^3 - 3n^2 - 3n - 2n) =$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Här fick vi, på ett nytt sätt, något som vi redan kände till. Men vi kan finna nya resultat på motsvarande sätt. Låt oss definiera "A-tal" på följande sätt

$$A_1 = 1^3$$
$$A_2 = 1^3 + 2^3$$
$$A_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$A_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

Hur kan vi finna en formel för A_n?
Som bekant gäller för varje tal x

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 6xy^3 + y^4$$

dvs

$$(x+y)^4 - x^4 = 4x^3y + 6x^2y^2 + 6xy^3 + y^4 \qquad (5)$$

Om man sätter $y = 1$ och i tur och ordning $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ får vi

$$2^4 - 1^4 = 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4A_n + 6P_n + 4T_n + n \qquad (6)$$

Sätts $x = 1$ och $y = n$ in i (5) fås

$(n+1)^4 - 1^4 = 4n + 6n^2 + 4n^3 + n^4$ och sätter vi in detta samt (1) och (2) i (6) får vi

$$4n + 6n^2 + 4n^3 + n^4 =$$
$$= 4A_n + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

ur vilket du lätt beräknar A_n.

På samma sätt kan du fortsätta med "B-tal" definierade genom

$$B_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4,$$

"C-tal" definierade genom

$$C_n = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5,$$

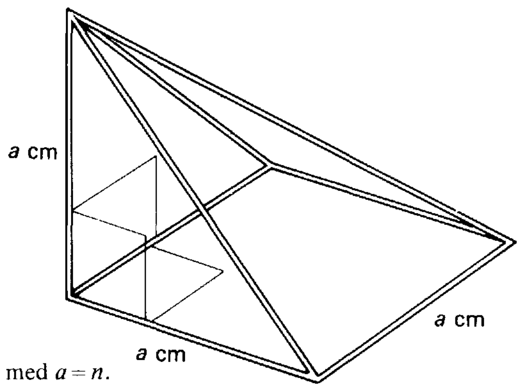
osv så långt du har lust.

Med A-talen är det något speciellt, som det inte finns någon motsvarighet till framöver. För varje naturligt tal n gäller att

$$A_n = T_n^2$$

Kontrollera detta!

Då jag visade ovanstående för min kollega, Torkil Heiede, kommenterade han detta på följande sätt. Det är intressant att jämföra (1) och (2) med respektive formel för arean av en likbent, rätvinklig triangel med kateten n och formeln för volymen av en pyramid av typen



med $a = n$.

Den förstnämnda ser ut på följande sätt

$$T = \frac{1}{2} \cdot n^2$$

och dess högra led liknar ju det i (1).
Den sistnämnda är

$$P = \frac{1}{3} \cdot n^3$$

Dess högra led liknar högerledet i (2) om det skrivs på formen

$$\frac{1}{3} n(n + \frac{1}{2})(n+1)$$