Problematisering av problemlösning

Vad vi än kallar de tre uppgifter som presenteras på följande sidor: problem, textuppgifter, benämnda tal, övningsuppgifter av högre svårighetsgrad, tillämpningar etc, är de en viktig del i lärares och elevers skolvardag. Det finns många fantastiska böcker, uppsatser och avhandlingar som handlar om problemlösning, inte minst Pólyas välkända och ofta citerade *Problemlösning – En handbok i rationellt tänkande* som gavs ut redan 1945 och på svenska 1970. Men det jag och mina elever behöver är inte fler metodiska eller didaktiska teorier om problemlösning. Det jag upplever som det stora problemet är att teorierna om problemlösning inte är till för skolans praktiska vardag.

En yrkesutbildning, som lärarutbildningen, hävdar man i bästa fall är baserad på forskning och med en stark del som är kunskap baserad på beprövad erfarenhet – i detta fall hur vi kan arbeta med ett problem. En vanlig reflekterande lärare är enligt min mening både en forskande lärare och en undervisande forskare, men utan den skriftliga dokumentationens stöd och nytta. Varför ska vi då definiera erfarenhetsbaserad forskning med hjälp av forskning om praktiken som inte består av erfarenhetsbaserad kunskap? Forskning och beprövad erfarenhet är två skilda världar, samtidigt som de är två poler i kunskapsutvecklingen.

I dagens skola ska alla barn och ungdomar i en viss ålder studera ett utvalt matematiskt innehåll. Det finns inte någon omfattande forskning som pekar på varför det är exakt detta innehåll som är sanningen, men att det är så hävdas bestämt från olika matematikvetenskapliga och politiska håll. Även när det gäller valda åldersgränser och valt innehåll till de olika gymnasieprogrammen finns det inte någon övertygande forskning som styrker dessa val. Enligt min mening är det den ”osynliga” maktobalansen i det politiska och akademiska tyckandet som ger oss de beslut som vi måste följa.

Vi ska inte glömma att det var först 1648 som matematik fick börja undervisas i skolan – under förutsättning att det i första hand var eleven som fritt valde att studera matematik och i andra hand att ansvariga i skolan, såsom skolledare och lärare, bedömde att matematikstudierna inte skadade andra ämnen.

Jag som vanlig lärare på en skola är anställd för att fullfölja läroplan och kursplan enligt nationella beslut, oavsedd vad jag tycker och tänker. Redan här befinner sig läraren i en problematisk situation. Det hävdas att lärare genom sin profession ska tolka kursplanen, men paradoxalt nog vill den centrala makten styra tolkningen genom olika verktyg som exempelvis de nationella proven.

Det har också tillkommit ett annat problem. I Sverige har läroboksförfattande och läromedelsproduktion, i demokratins namn, blivit en kommersiell arbetsmarknad. En snäv och kontraproduktiv tolkning av ett statligt uppdrag att, utan granskning, tillhandahålla goda läromedel har, trots beslutfattande individers goda intentioner och mål, gett ett mindre lyckat resultat. Sverige är enligt min mening ett av de mest demokratiska länderna i världen och vi har sedan 1800-talet, och speciellt från 1950, satsat på *en skola för alla*, vilket jag tolkar som *kunskap för alla* och därmed *makt till alla*. Låt inte syftet och den heliga intentionen för Sveriges största arbetsplats kommersialiseras.

När det gäller ämnen som filosofi, litteratur och samhällskunskap går det att förstå att staten inte ska färga och värdera innehållet, men matematik är troligen det enda vetenskapsområde som är befriat från ideologiska färger, möjligtvis med statistik och sannolikhet som undantag. Det är kanske dags att tänka om när det gäller matematik. Mitt förslag är att politiker och deras medhjälpande experter, tillsammans med akademiker och andra, väljer ett entydigt matematiskt kursinnehåll, alltså att kursboken och kursplanen blir identiska. Sedan är det självklart upp till professionen *hur* arbetet med detta innehåll ska ske i skolvardagen. Efter några år skulle vi kunna se resultatet, utan att bekosta dyra utredningar. Utredningar och undersökningar gör vi om vi vill förbättra något, inte för att hitta en annan politisk väg. På så vis kan vi gå mot likvärdighet och skolan drabbas inte av de onödiga problem som vi idag brottas med.

Elever och problemlösning

När eleverna som jag möter inte klarar enkla färdigheter, är det mer problematiskt att diskutera problemlösning när jag har ansvaret att uppfylla kursplanens mål. Problemlösning är situerad och kontextuell, inte bara i problemets innehåll utan också kontextuellt i den elevgrupp där jag som lärare befinner mig.

Jag har de mesta motiverade eleverna som frivilligt läser Matematik 5 på gymnasieskolan. Dessa elever har oftast ingen större färdighetsproblematik, men i vardagen ser jag att den problemlösning som de ställs inför kräver att de måste vara mycket mer förtrogna med sina kunskaper. För att kunna lösa matematiska problem behöver vi bland annat förstå matematikens språkbruk. Eleverna ska omtolka de meningar som står skrivna på vanlig svenska till det matematiska språket, vilket kräver tålamod och kan vara ett långsamt och ibland tråkigt arbete som tar mycket tid och energi i anspråk.

Matematikdidaktiska kunskaper ska hjälpa mig som lärare att reflektera över problematiken med själva inlärningsprocessen hos mina elever. Detta är mycket mer krävande än bara några viktiga metodiska steg, vilka kan varieras både från elev till elev och från problem till problem. Därför beskriver jag följande tankegångar med avseende på inhomogent motiverade elevgrupper och exemplifierar med en långtgående dialog hur vi tillsammans utvecklar vårt matematiska språk och kommunikationsförmågan där resonemang står i fokus. Dialogerna resulterar i en matematisk modell, en ekvation, en funktion etc, vilket gör det möjligt för eleverna att upptäcka modellen, eller motsvarande, även i en annan liknande kontext och då kunna lösa problemen.

Tre vanliga gymnasieproblem

Följande problem är hämtade från läroboken *Matematik 5000*. Det jag framförallt vill visa är exempel på dialoger som jag för med mina elever och hur de genom dem blir allt säkrare på att kommunicera och argumentera, de får verktyg att använda vid problemlösning.

Problem 1: Ballongen

> Luft pumpas in i en sfärisk ballong så att volymen ökar med hastigheten 95 cm^3/s. Hur snabbt ökar ballongens radie då diametern är 38 cm?

Även om hela texten i övningsuppgiften är på svenska, är den inte formulerad på det sätt som språket vanligen används på och som eleverna är vana vid. Uttrycken och meningarnas betydelse är satta i ett tillämpat matematiskt sammanhang och även utfallet är beroende på detta sammanhang.

Det är liksom två olika språk, vilka vi med hjälp av matematisk information och kunskap bör tolka med tålamod och stegvis arbete tills vi kommer fram till symboler, det mer rena matematiska formelspråket, för att vi slutligen ska kunna ta lämpliga beslut för olika beräkningar eller helt enkelt testa oss fram till en beräkning som är lämplig för den speciella kontexten. Vi startar med att fråga oss vilken information problemformuleringens ord ger oss när vi översätter till matematikens symbolspråk. Redan i uppgiftens första rad finns två viktiga informationer.

Information I: Problemet handlar om volymen av en sfär. Med hjälp av matematikens språk kan vi översätta innehållet till

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}\,.$$

Volymen av en sfär är beroende av dess radie, vilket kan uttryckas som att volymen är en funktion av radien. Men i denna övning är radien beroende av tiden, dvs radien är i sin tur en funktion av tiden. Alltså är även volymen beroende av tiden. Med andra ord, volymen är en sammansatt funktion som går att uttrycka symboliskt

$$V(r(t)) = \frac{4\pi r^3(t)}{3}\,.$$

Information II: Problemet handlar också om volymändringar, som matematiskt är derivatan av volymen $V'(r(t)) = 4\pi r^2 r'(t)$ och som här har hastigheten 95 cm^3/s.

Information III: På andra raden ställs frågan ”Hur snabbt ökar ballongens radie?” ($=r'(t)$) och den är villkorad till den tredje informationen ”då diametern är 38 cm”, dvs $r = 19$ cm. Nu samlar vi våra informationer tillsammans med frågan:

$$\begin{cases} V'(r(t)) = 95\ cm^3/s \\ r = 19\ cm \\ r'(t) = ? \end{cases}$$

I sista steget arbetar vi med beräkningen:

$$95 = 4\pi 19^2 r'(t) \Leftrightarrow r'(t) = \frac{95}{4\pi 19^2} \approx 0,021\,.$$

Enheten är centimeter, så svaret är: När diametern är 38 cm, ökar radien med hastigheten 0,021 cm/s. Eller lite snyggare och med förståelse 0,21 mm/s.

Problem 2: Glaset

> I ett glas med konisk form är basytans diameter lika med glasets höjd. Glaset fylls med äppelcider med hastigheten 3,0 cm^3/s. Hur snabbt stiger vätskenivån då vätskedjupet är 5,0 cm?

Information I: I ett glas med konisk form kan det vara enklare att tänka ”toppytans” diameter, här lika med höjden, $h = d = 2r$. Denna information hjälper oss att byta h mot $2r$ eller r mot $h/2$ om det behövs. Vad som ska ersätta vad får vi veta senare.

Information II: Den andra informationen ges indirekt genom information III som handlar om volymändringar. Alltså är information II konens volym

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}\,.$$

Information III: Glaset fylls med äppelcider med hastigheten $V' = 3{,}0\ \text{cm}^3/\text{s}$.

Information IV: Den fjärde informationen handlar om höjden och inkluderar frågan ”Hur snabbt stiger vätskenivån då vätskedjupet är 5,0 cm?”. Volymen är beroende av höjden och höjden i sin tur är beroende av tiden. Alltså är volymen en sammansatt funktion $V(h(t))$. Därmed är volymändringen $V'(h(t)) = 3\ \text{cm}^3/\text{s}$. Med andra ord uttrycker vi konens volym genom höjden

$$V(h(t)) = \frac{\pi \frac{h^2}{4} h}{3} = \frac{\pi h^3}{12}\,.$$

Volymändringen ges av

$$V'(h(t)) = \frac{\pi h^2 h'(t)}{4}\,.$$

Nu samlar vi all information tillsammans med frågan:

$$\begin{cases} V'(h(t)) = 3,0cm^3/s \\ h = 5cm \\ h'(t) = ? \end{cases}$$

Sista steget är beräkningen:

$$3 = \frac{25\pi h'(t)}{4} \Leftrightarrow h'(t) = \frac{12}{25\pi} \approx 0,15\,.$$

Svar: När höjden i glaset är 5,0 cm stiger vätskeytan med hastigheten 1,5 mm/s.

Problem 3: Plåtburken

En plåtburk utan lock har formen av en rak, cirkulär cylinder.

a) Bestäm ett samband mellan höjden *h* och radien *r* då materialåtgången vid en given volym *V* är så liten som möjligt.

b) Kontrollera resultatet grafiskt för $V = 250\ \text{cm}^3$.

Steg 1: Vad innebär följande mening rent matematiskt: ”En plåtburk utan lock har formen av en rak, cirkulär cylinder.”? Rita den geometriska figuren och anteckna dess olika formler:

Volymen skrivs som $V = \pi r^2 h$ (1). Begränsningsarean består av en mantelarea ($2\pi rh$) och areorna av botten (πr^2) och toppen (locket $= \pi r^2$). Men det står utan lock, så hela arean är i denna kontext $A = 2\pi rh + \pi r^2$ (2).

Steg 2:
I. I uppgift a bör vi läsa ännu långsammare för att kunna göra en korrekt tolkning: ”Bestäm ett samband mellan höjden *h* och radien *r*.” Vi har bara två formler att utgå ifrån; antingen volymen eller arean för att hitta ett samband mellan höjden *h* och radien *r*. Vi antar att vi inte vet vilket samband som är lämpligast, så vi använder oss av båda formlerna.

Men vad ska bestämmas med avseende på vad? Vanligen väljs den formel som har grad 1. Här behöver vi inte kontrollera eller diskutera negativa svar med jämna rotdragningar, alltså är det enklast att bryta ut h. Från (1) får vi:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \text{och från (2) får vi:} \quad h = \frac{A - 2\pi r^2}{2\pi r}\ .$$

II. I andra delen av uppgift a finns villkoren för det önskade sambandet och ytterligare lite mer matematisk information: ”Bestäm ett samband mellan höjden h och radien r då materialåtgången vid en given volym V är så liten som möjligt.”

III. Vad innebär ”materialåtgång” i denna kontext? Jo, det måste handla om den totala arean som burken utgör, rent matematiskt $A = 2\pi rh + \pi r^2$.

IV. Vad innebär ”vid en given volym V”? Alla ord verkar bekanta för oss. Är det verkligen så? Kanske! Men det tror inte jag. Vad betyder ”given volym”? Svar: bestämd volym. Men här står bara en bokstav ”V” som representant för given volym (= bestämd volym). Det går inte att räkna med, tänker många. Vi förväntar oss att en bestämd volym ska representeras av ett tal och medföljande enhet så som $V = 250\ \text{cm}^3$ eller ännu enklare $V = 1\ \text{cm}^3$. I vilket fall som helst kan vi dra slutsatsen att vi i förväg ska bestämma en önskad volym och då är volymen konstant. Vi kan nu använda oss av volymformlen för att hitta ett samband mellan höjden h och radien r:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}\ .$$

Nu är vi symboliskt sett klara med första meningen i a-delen. Vi har bestämt ett samband mellan höjden h och radien r. Varför behöver vi detta samband? För att få veta svaret går vi, med tålamod, vidare.

V. Vad syftar den lilla texten ”är så liten som möjligt” till? Syftar den på volymen eller arean? Eftersom volymen är konstant bör det syfta på ”materialåtgången” som är den totala mängden plåt som går åt, här lika med $A = 2\pi rh + \pi r^2$. Alltså är det materialåtgången som ändras. Vad är dessa ändringarna beroende av? Jo, höjden h och radien r. Ojdå! Det blir en funktion med två variabler och det tar vi inte upp i gymnasieskolan. Men det gör inget eftersom vi har ett samband mellan h och r. Vi kan ersätta den ena variabeln med avseende på den andra. På så sätt fixar vi en funktion som enbart är beroende av en variabel.

$$A(r) = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2V}{r} + \pi r^2\ .$$

VI. Vilket matematiskt begrepp associeras med uttryck som ”så liten som möjligt”? Jo, det handlar om förändringar där det minsta värdet är intressant. Alltså ska derivatan till ovanstående funktion nollställas och undersökas.

$$A'(r) = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r = -\frac{2V}{r^2} + \frac{2\pi r \cdot r^2}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 2V}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \qquad \text{ger} \qquad r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

På så sätt hittar vi värdet på radien och därmed värdet på höjden. Men hur vet vi att detta göra att tillverkaren använder minsta möjliga mängd material för en sådan burk? Jo, antingen genom teckenstudium eller med hjälp av andraderivatan.

Vi kan hävda att eftersom volymen V och radien r, samt π, är positiva tal är andraderivatan positiv eller kan vi räkna den enligt följande:

$$A''(r) = \frac{4V}{r^3} + 2\pi\,.$$

OBS! Om du tycker att följande uträkning är helt onödig, kontakta mig gärna och låt mig få höra dina argument.

$$A''(\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}) = \frac{4V}{\frac{V}{\pi}} + 2\pi = \frac{4\pi V}{V} + 2\pi = 6\pi > 0.$$

Alltså är $r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ och det ger den minsta materialåtgången för burken.

Nu är vi klara med a-delen av problemet. Vi kan kontrollera genom att se om alla steg i vår argumentation och våra beräkningar är korrekt genomförda. Om vi har klarat a-delen av detta problem så har vi gjort det med korrekta matematiska resonemang och beräkningar och har då kommit fram till ett svar som bör vara korrekt.

Styrkan av korrektheten i detta svar ligger i den matematiska argumentationen och kräver ingen annan kontroll. Därför är det bättre om b-delen omvandlas till exempelvis ”Bestäm grafiskt och/eller algebraisk materialåtgången då $V = 250\,\text{cm}^3$. Eftersom det finns ett grafiskt lösningsförslag i läroboken visar jag bara den algebraiska delen:

$$r = \left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$r = \left(\frac{250}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 4,30$$
$$A(r) = \frac{2V + \pi r^3}{r} = \ldots = \frac{3V}{r}$$
$$A(4,30) = \frac{750}{4,30} \approx 174,42$$

Svar: Den minsta materialåtgången är $174{,}42\,\text{cm}^2$ då $r \approx 4{,}30\,\text{cm}$.

Russell Hatami

LITTERATUR

Alfredsson, L., Bråting, K., Erixon, P. & Heikne, H. (2015). *Matematik 5000, Kurs 5, Blå lärobok*. Natur & Kultur.