Matematikens sjätte sinne

– en praktisk förmåga

När vi talar om förmågor i matematik brukar det handla om exempelvis resonemang, begrepp, rutiner, relevans och kommunikation. En annan är en praktisk förmåga, vars roll liknar det vi brukar kalla vårt sjätte sinne. Därför väljer jag att kalla denna praktiska förmåga för ”Matematikens sjätte sinne”.

Min mamma Anis var analfabet men hon var ändå min största och enda pedagogiska idol. Med sin starka tillit till människan och med dialogisk argumentation praktiserade hon den viktigaste essensen i det sociokulturella perspektivet – utan att ha den minsta aning om Vygotskijs pedagogiska filosofi. Min pappa var en mycket litterärt bildad person och poet samt personalchef för stadens största tygfabrik, men han hade gått i personlig konkurs utan min mammas känsla för ekonomi. Det var hon som planerade, fattade beslut och hade rollen som operativt organ för hushållsekonomin. Mycket intressant är att pappas lön gick till mammas, eller kanske snarare familjens, ekonomiska kassa och min pappa fick månadspeng av sin fru.

Mammas människosyn gjorde att hon uppfostrade oss barn att bli solidariska människor samtidigt som hon hade koll på minsta lilla del av husets ekonomi. Jag kan inte förstå hur hon hade lärt sig att beräkna, kalkylera, prognosera etc för en stor familj med elva barn. Hon var samhällsaktiv och tongivande i kvinnogrupper där borgmästarens fru var en av medlemmarna och jag glömmer aldrig att de på mammas initiativ fick borgmästarens anställda att fälla stora träd för att blockera vägen för lastbilar i vårt bostadsområde.

Under livets gång har jag träffat många individer, som i formell bemärkelse varit helt okunniga i matematik, men mycket skickliga i praktisk matematik, dvs de har haft ett sjätte sinne för matematik som varit deras ledstjärna. Jag har haft förmånen, tack vare min uppfostran, att kunna lyssna, ta emot och värdesätta mina elevers praktiska matematiska förmåga och jag har på så sätt själv lärt mig av dem att utveckla min egen praktiska förmåga så att mitt sjätte sinne för matematik har utvecklats.

Troligen är det så att om de stora matematikerna inte hade haft detta sjätte sinne skulle de aldrig ha kommit fram till epokgörande resultat. Med djupgående historisk forskning kan vi säkert se betydelsen av detta sjätte matematiska sinne, som egentligen borde kallas för den absolut viktigaste matematiska förmågan eftersom det är den som kan bana väg för nya tankar och idéer, från känsla till logik, från värdefulla uppskattningar till matematiska modeller.

Matematikdidaktiska forskare kan självklart köra snabbt på den breda väg som har skapats genom långa forskningstraditioner, men forskare bör också våga beforska andra vägar. Varför diskuteras inte denna praktiska förmåga som ofta inte får chans att utvecklas i skolan? Tänk hur många elever det kan finnas som, liksom stora matematiker, bara kan komma in i den matematiska världen med hjälp av möjligheten att utveckla sin praktiska förmåga.

Bollar i en container

Följande uppgift brukar jag använda i min problemlösningsundervisning. Problemets lösning utvecklades genom att jag var mottaglig för mina elevers lösningsförslag som bygger på den praktiska förmågan. Min uppgift som lärare är att söka de matematiska grunder som kan förstärka deras praktiska förmåga och på så sätt blir de mer mottagliga för matematikens teoretiska del.

> En container är 18 meter lång, 2 meter bred och 1,8 meter hög. Arvid ska lasta stora bollar med en diameter på 30 centimeter. Bollarna är fullpumpade med luft. Hur många sådana bollar får han maximalt plats med?

Eleverna och jag blir snabbt överens om att först och främst är det bra om vi har samma enhet, förslagsvis enheten decimeter. Containerns volym i dm^3 är 180 x 20 x 18 och vi kan tänka: *Hur många bollar får plats längs varje sida?*

Många elever, speciellt de som behärskar volymberäkningar, kan göra en snabb beräkning och komma fram till ett svar som elever med utvecklad praktisk förmåga inte kan acceptera. Men eftersom denna förmåga ofta är bortglömd och då inte har något värde, hörs inte den röst som bygger på denna absolut viktigaste matematiska förmåga.

Problem som detta kan öppna dörren för den praktiska förmågan, speciellt när det krävs en verklighetsnära reflektion. Detta kan ge många elever, inklusive de mest matematikintresserade, chans att diskutera och utveckla sina kommunikations- och resonemangsförmågor samtidigt som matematikens sjätte sinne får möjlighet att se dagens ljus.

Lösningsförslag 1

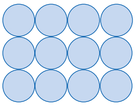
Hur kan en elev, som kanske inte riktigt behärskar volmberäkningar, ändå hävda att följande beräkning är fel?

$$antal\ bollar = \frac{containerns\ volym}{bollens\ volym} = \frac{180 \cdot 20 \cdot 18}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3 \cdot 180 \cdot 20 \cdot 18}{4\pi r^3} \approx 4583$$

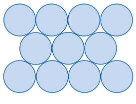
Det är alltså inte beräkningen i sig som är fel, men i denna kontext är det helt galet fel!

Lösningsförslag 2

När det skapas möjlighet för dialog och matematisk kommunikation kan det dyka upp en annan lösning och en majoritet av eleverna, jag vill hävda nästa alla, accepterar den. I samtal om problemet kommer elever ofta fram till att en boll med diameter på 3 dm tar lika stor plats som en kub med kantlängd på 3 dm:



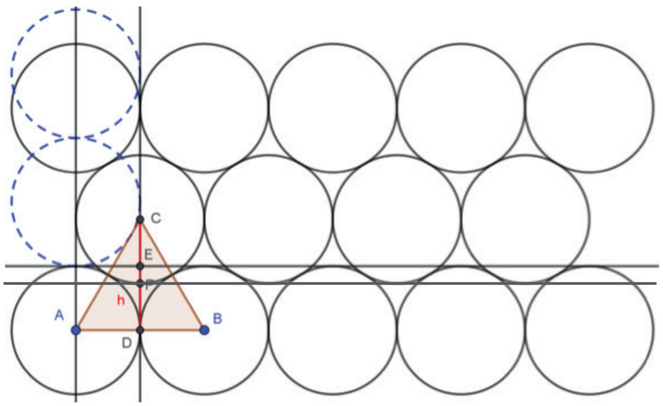
> Antal bollar längs sidan som är 180 dm är lika med 180/3 = 60.
>
> Antalet bollar längs sidan som är 20 dm är 6 eftersom 20/3 = 6 rest 2. På 2 dm ryms det inte någon boll med diametern 3 dm.



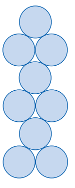
På golvet får vi alltså plats med 60 · 6 = 360 bollar och på höjden 18/3 = 6 bollar. Det går att lasta 360 · 6 = 2 160 bollar. Men, invänder en praktiskt tänkande elev, att stapla bollar som om de vore kartonger är inte det bästa sättet. Bollar kan ligga tätare, så det bör gå att lasta fler.

Lösningsförslag 3

Nu är det verkligen dags att lyssna på den praktiska förmågan. Vi kan upptäcka att när vi packar bollarna så de ”kilas in” eller ”trillar ner” blir det sju rader bredvid varandra med 60 bollar i varannan rad och 59 i varannan. Med start på 60 bollar i första raden (60, 59, 60, 59, 60, 59, 60) så får vi större utrymme för flera bollar. Anledningen är att på detta sätt sparas 0,4 dm då två rader kommer närmare varandra. Nu kan Geogebra vara ett suveränt verktyg att använda som teoretiskt stöd till den praktiska förmågan:

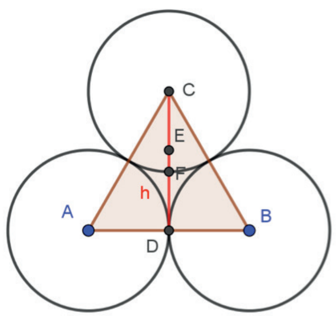


De tre raderna med 59 bollar gör att det går att packa $0{,}4\,\text{dm} \cdot 3 = 1{,}2$ dm tätare. Längs containerns bredd, 20 dm, ryms sex bollar à 3 dm med en rest på 2 dm. Dessa 2 dm plus 1,2 dm som blir över när bollarna packas tätare ger 3,2 dm. Det finns alltså tillräckligt med plats för en sjunde rad med 60 bollar. På den rektangulära golvytan med sidorna 180 x 20 dm kan det maximala antalet bollar då vara $60 + 59 + 60 + 59 + 60 + 59 + 60 = 417$.



Vi vet att det går att lägga sex lager bollar på höjden och även om de ”trillar ner” och de blir lite tätare packade så blir det extra utrymmet enbart 1 dm, vilket inte räcker till ytterligare ett lager bollar. Detta gör att vi kan lasta $417 \cdot 6 = 2\,502$ bollar, men det är inte helt accepterat att det i praktiken går att göra så. Lite geometrisk förklaring krävs här och den kan ge extra näring till den praktiska förmågan. Därefter kan vi göra ett matematisk begrundande.

Cirklarnas centrum är hörn i den liksidiga triangeln ABC med sidan 3. Anledningen är att tangenterna som passerar genom punkterna E och F är normaler mot radien i de tre cirklarna. I Geogebra kan vi beräkna sidorna i den liksidiga triangeln ABC där $DC = h = 2{,}6$ och skillnaden mellan 3 och 2,6 är 0,4.



$DC = h$

Det exakta värdet av DC som höjd mot AB, i triangel ABC, kan bestämmas med hjälp av Pythagoras sats eller trigonometri.

1. Pythagoras sats:

$$h^2 = 3^2 - 1{,}5^2 = 9 - 2{,}25 = 6{,}75$$

$$h \approx 2{,}60$$

2. Trigonometri:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \approx 2{,}60$$

$$EF = 3 - h = 3 - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\,(2 - \sqrt{3})}{2} \approx 0{,}4019 > 0.4$$

En avslutande reflektion

Att tänka ett steg till är en viktig avslutande reflektion. Det är praktiskt omöjligt att lasta 2502 lösa bollar i en vanlig container med dörrar på ena kortsidan. Teoretiskt skulle det kunna fungera med en container där taket kan lyftas åt sidan, men det är troligen mest praktiskt att fundera på lämpliga förpackningar där ett antal bollar kan packas ekonomiskt och där kartongerna är hanterbart stora. Som inspiration kan Uppslaget *Paketering på prov* i Nämnaren 1998:3 användas. Det inledande bollproblemet kan också omformuleras:

> Kartonger med måtten 90 x 20 x 18 cm ska användas för att packa frigolitkulor som har en diameter på 3 cm. Undersök vilket som är det maximala antalet frigolitkulor som kan packas i varje kartong.

En utökning av problemet är att beräkna vikten av de kulor som packas i varje kartong liksom att beräkna hur många kartonger med kulor som får plats i en container. Hur mycket skulle den lasten väga?

Russell Hatami