Demokratiska grunder i matematikundervisningen

En dialog om irrationella tal

En matematiklärare bär med sig en outtalad och oskriven men stark maktposition. Det kan, i första hand, bero på ämnets karaktär där matematik historiskt har använts som en slags sorteringskanal och att den som varit kunnig i matematik ansetts som intelligent. I utbildningssystemet skapar ämnet matematik, liksom språk, ett speciellt maktförhållande där läraren enkelt kan fungera, eller uppfattas, av de studerande som läromästaren som alltid har rätt. Även läroböcker i matematik har haft en liknande stark position. Enligt min erfarenhet anser studerande sällan att det kan finnas fel i facit och att det svar som de själva har kommit fram till istället är det korrekta. Detta i sig försvagar inte bara intresset för matematikstudier utan förhindrar också kritiskt och innovativt tänkande.

I ett samhälle som har visioner för djupare demokratisering, passar inte en form av matematikundervisning som åtminstone av de studerande upplevs som ett enkelriktat förhållande på samma sätt som en läromästares och lärjunges förhållande. I ett samhälle som anses, åtminstone i vissa avseenden, vara demokratiskt och där skolan ska uppfostra demokratiska medborgare, är förhållandet läromästare och lärjunge i matematikundervisningen en olösbar paradox.

Ovanstående påstående låter som en hypotetisk tanke eller ett antagande för forskning, något som jag behandlar i en kommande avhandling. Det är min erfarenhet från många års matematikundervisning i tre länder som ligger bakom påståendet. Medvetenheten finns i kärnan av mina pedagogiska aktiviteter, det vill säga att jag medvetet motverkar den maktobalans som automatiskt existerar och växer vid undervisning i ämnet. Ju mer samhället är demokratiserat desto mindre skapar denna maktobalans intresse för matematik. Detta är därför ett problemen som vi i demokratiska länder måste brottas med.

Vi kan konstatera att i ett demokratiskt samhälle existerar två viktiga paradoxer som kräver energi av matematikläraren vid undervisningen. Den ena löses med en medvetenhet om maktobalansen och den andra kräver inte bara lärarens ansatser under de studerandes lärprocess utan det måste också skapas en medvetenhet hos de studerande för att både förståelse och mekanisering är viktiga och nödvändiga villkor i matematikinlärning – en utvecklande och krävande dialektisk inlärningsprocess.

Samtalets näringsrika effekter i inlärningsprocessen

Följande är en dokumentation på en lärplattform där några blivande lärare i grundskolans tidiga år, F–åk 3, diskuterar irrationella tal. Alla namn är utbytta.

Läraren kunde gå in i dialogen och beskriva en liten del av hur man kan använda och räkna med rationella och irrationella tal enligt de etablerade definitionerna. Läraren kunde också använda sin pedagogiska ledarrollen för att balansera inlärningsvågen där det på ena sidan finns mekaniska räkningar och på den andra sidan förståelse.

Fredag 21 september 18:04; läraren: Här skriver du dina frågor som berör innehållet av undervisningen v 38.

Lördag 22 september 08:34; Maria: Hoppas jag är på rätt forum nu, för jag har en fråga angående kompendiet. Jag har svårt att förstå vad rationella tal och irrationella tal är ... Någon som kan förklara?

Lördag 22 september 20:23; läraren: Hej och tack Maria. Självklart kommer jag att förklara närmare. Men jag önskar att dina klasskamrater kommer in i diskussionen. Får jag be dig berätta för mig hur du uppfattar texten i kompendiet om rationella och irrationella tal?

Söndag 23 september 12:43; Rose: Hej Maria! Jag har också svårt att förstå irrationella tal och rationella tal. Det står ju att irrationella tal är tal som inte går att skriva i bråkform med exakt värde. Är det då tal som du avrundar som är irrationella tal?

Söndag 23 september 14:02; Kim: Du kan ju avrunda ett rationellt tal också t ex 0,25 kan du avrunda till 0,3. Som jag har förstått det hela är ett irrationellt tal ett tal som inte kan skrivas i bråkform.

Söndag 23 september 15:57; läraren: Hej och tack för din kommentar Kim. Vilken skillnad tänker du på, när du skriver 0,25 avrundat till talet 0,3? 0,25 är decimalbråk eller helt enkelt går att skriva som bråk liksom 25/100 eller 1/4! Alltså är 0,25 ett rationellt tal. Däremot går inte tal som pi att skriva i bråkform. Ett annat exempel är längden på diagonalen till en kvadrat som inte går att skriva som ett tal i bråkform.

Söndag 23 september 16:59; Kim: Jag tänkte mer på att svara Rose på hennes undran om alla tal som man avrundar är irrationella. Att 0,25 är ett bråktal (1/4) och att det är rationellt har jag förstått.

Söndag 23 september 18:19; Ella: Hej! Jag har också uppfattat att irrationella tal är tal som inte går att skriva i bråkform.

Jag undrar hur man ska skriva siffrorna på tallinjen, över eller under?

Söndag 23 september 18:28; läraren: Stor tack Kim. Bra! Talet 1/3 är ett rationellt tal eftersom talet är skrivet i bråkform med heltal på både täljare och nämnare. Talet blir inte irrationellt om vi avrundar det. T ex kan 1/3 avrundas med två decimaler till 0,33.

Söndag 23 september 18:30; Elsa: Är det så att rationella tal alltid har en bestämd avslutning i decimalformen. T ex (0,25), (0,36), (1,25) osv och irrationella tal är sådana man måste avrunda för att få till bestämdhet?? T ex 0,333333333 eller 0,2626262626 osv. Är jag inne på rätt spår??

Söndag 23 september 21:14, Elsa: Har du något exempel på tal som inte kan skrivas i bråkform? Ps jag har svårt för bråk ds.

Måndag 24 september 08:43; läraren: Hej och tack Ella. Mycket bra! Över eller under tallinje är en smaksak. Gör det som du tycker passar bäst.

Måndag, 24 september 10:30; läraren: Mycket intressanta diskussioner. Talmängder som jag tog upp i början av kompendiet är en helhetsbild över de tal som behandlas i hela grundskolan. Helhetsbilden kan liknas vid en helikopterbild av en stad. Dvs för att förstå detaljerna, krävs att man går närmare/djupare i varje del. Det är det som vi kommer att göra i denna kurs. Första talmängden som vi har börjat arbeta med är de naturliga talen. Med andra ord de positiva heltalen inklusive noll, vilka kan betecknas 0, 1, 2, 3, 4, …

Bråk kommer vi gå igenom senare. Tal som inte går att skriva i bråkform är t ex talet pi. (Vi kommer att diskutera och förklara pis födelse och existens).

Jag börjar först med en kort inledande information: Du vet att t ex $2 \cdot 2$ är lika med 4; $3 \cdot 3 = 9$ och $7 \cdot 7 = 49$ osv. Om vi nu ställer frågan om vilket tal multiplicerat med sig själv som ger produkten 4 eller 49 så kan vi svara att talet är 2 eller 7. Om vi däremot ställer frågan så här: Vilket tal multiplicerat med sig själv ger produkten 2, 3, 5, 7 eller 8 kan vi inte hitta ett tal som går att skriva i bråkform. Längden på diagonalen i en kvadrat har också samma egenskap, dvs längden av diagonalen i en kvadrat går inte beskriva med ett tal i bråkform.

För irrationella tal har vi därför presentationsformen med rotmärke som beskriver det exakta värdet av det aktuella irrationella talet. Exempelvis svaret på frågan om vilket tal multiplicerat med sig själv som har produkten 2, är andra roten ur 2, vilket går att symbolisk presentera som $\sqrt{2}$ eller $2^{1/2}$.

Måndag 24 september 10:34; läraren: Ja, rationella tal är de tal vars decimalutveckling är periodisk. Denna definition innehåller första delen av det som du skrev om tal som 0,25 eller 1,25 och dylika. Men tillägget är att även tal som 0,3333… eller 0,26262626… där en eller flera siffror upprepas; dvs deras decimalutveckling är periodisk och går att skriva i bråkform såsom 3/9 = 1/3 eller 26/99 medan talet pi har oändliga decimaler utan att det i den decimala utvecklingen finns något mönster eller så kallade period. Med andra ord: ingen siffra eller inga siffror i samma form oavsedd tusental, miljontal eller ännu flera decimaler upprepas! Med tretton decimaler är pi avrundad till 3,1415926535898. ”De gamla matematikerna” försökte till ett par hundra decimaler och såg fortfarande inte någon period. Första på 1800-talet fick matematikerna bevis på att talet pi inte har någon periodisk decimalutveckling; alltså visades att pi är ett irrationellt tal.

Pedagogiska paradoxer

I dagens pedagogiska debatt sätts förståelsen i centrum för matematikinlärning och intresseskapande, medan det tidigare, då jag gick i skolan, var det mekaniska och algoritmiska kunnandet som var centralt. I båda dessa tidsepoker har skolmatematiken varit överdrivet endimensionell. I det verkliga livet, utanför skolmatematikens politiska och ämnesmässiga krav, har matematikundervisningen utvecklats och nu ser vi både förståelse och att mekanisera sitt kunnande som två viktiga ben att stå på. Det är dags att reflektera över denna paradoxala pedagogiska process för att individen ska få en chans att balansera sin inlärning på ett passande och harmoniskt sätt.

I min licentiatavhandling *Reguladetri – En retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet* konstaterar jag en annan matematisk paradox som framkommer på grund av ämnets karaktär:

> *Matematikens fördel kan vara dess nackdel. Matematiklärandet som en process skapar ständigt pedagogiska paradoxer. Matematik är en speciell humanistisk vetenskap som generaliserar och skapar modeller. Genom att resonera sig fram kommer forskare eller studerande fram till lösningar och metoderna som sedan kan generaliseras till allmängiltiga regler. Poängen är att dessa därefter kan användas för att lösa alla likartade problem mekaniskt. Jag menar att med ett resonerande tankesätt kan kraftfulla modeller skapas som mekaniserar räkningarna och som i sin tur kan skapa nya tankemönster som ger upphov till nya mekaniska procedurer. Det är viktigt att reflektera över denna paradoxala egenskap hos matematiken; samtidigt som nya metoder och begrepp utvecklas ur gamla så kan de gamla metoderna vara ett hinder för utvecklingen av de nya. På samma sätt förutsätter många gånger förståelsen av nya metoder att man arbetat med de gamla samtidigt som dessa i längden är ineffektiva. Denna speciella egenskap har under historiens gång skapat en dialektisk process inom matematiken. Aritmetikens och geometrins utveckling lade t.ex. grunden för algebran samtidigt som både geometri och aritmetik fungerade som bromsklossar för algebrans vidareutveckling. Negativa tal eller imaginära tal kunde inte accepteras till fullo för 200 år sedan, ty de hade varken en aritmetisk eller geometrisk betydelse. En matematisk formel är en form av matematisk modell. En matematisk modell har enligt min mening mycket starkt koppling till dess användning inom matematiken, inom andra vetenskapsområden eller inom praktisk verksamhet.*

I det tidigare referatet ser vi tydligt att under fyra dagar kunde studenterna, i ett öppet och demokratiskt samtal, komma fram till djupgående förståelse om irrationella tal, vilket i ett historiskt perspektiv tog många århundraden för mänskligheten att förstå.

Russell Hatami

Licentiatavhandlingen finns i fulltext på
www.diva-portal.org/smash/get/diva2:205218/FULLTEXT01.pdf