

Problemavdelningen

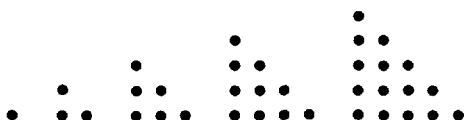


Problemlösning med hjälp av miniräknare handlar problemavdelningen om denna gång. Problemen är sammanställda av *Andrejs Dunkels*, Luleå.

Många av problemen är lösbara för grundskolans elever. Berätta gärna, när du sänder in lösningarna, om hur du och/eller dina elever gått till väga då ni löst problemen. En extra bok lottas ut bland elevlösningarna.

Senast den 30 april 1984 vill vi ha in era lösningar.

- 1031 Triangeltal brukar man kalla sådana tal som går att representera med hjälp av ett triangulärt mönster.



De fem första triangeltalen är alltså 1, 3, 6, 10 och 15. Talet 1 är det enda av dessa som också är ett kvadrattal, dvs går att representera med ett kvadratisk mönster. Hur blir det längre fram, finns det några fler triangeltal som också är kvadrattal? Undersök så långt som din räknare tillåter.

- 1032 Redan de gamla grekerna tyckte att vissa tal var speciellt roliga att syssla med. Bl a studerade Pythagoras och hans elever vänskapligt sinnade tal. Det är par av heltal med ett speciellt inbördes förhållande. Pythagoras uttryckte saken så här:

”En vän är en som är det andra jaget, såsom 220 och 284.”

Vad han menade var att om man lägger ihop alla faktorerna i 220, med undantag av 220 självt, så får man 284, och om man lägger ihop alla faktorerna i 284, talet självt undantaget, så får man 220.

Faktorsumman för talet $220 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$,
Faktorsumman för talet $284 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Vilka av följande tal ingår i ett vänskapligt sinnat par, och vilket är i så fall det andra talet i paret?

868, 1 210, 2 620, 28, 1 777, 6 232, 496, 18 416, 33 550 336.

- 1033 Titta på följden av potenser

$5, 5^2, 5^3, 5^4, \dots$

och undersök vilka slutsiffror som är möjliga. Finns det något mönster? Hur är det med tiotalssiffrorna? Hundratalsiffrorna?

Undersök även potenser av andra tal i detta avseende.

- 1034 Ett mycket välkänt felslut som funnits med i många, många år är denna *förkortning* med 6 :

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

Man stryker alltså helt enkelt sexorna och får kvar en etta där uppe och en fyra där nere, alltså en fjärdedel, som är rätt svar. Den här gången skall vi ”ösa på med fler sexor” och se om det fortfarande stämmer. Prova alltså att stryka sexor på det här sättet och jämför med rätta värdet för uttrycken

$$\frac{166}{664}, \frac{1666}{6664}, \frac{16666}{66664}, \frac{166666}{666664}, \dots$$

och förklara varför det blir som det blir.

1035 I den här uppgiften kommer vi att använda . . . i betydelsen att mönstret fortsätter i all oändlighet. Du har säkert stött på dessa prickar i samband med decimaluttryck, t ex $0,333 \dots = 1/3$ (exakt), $0,111 \dots = 1/9$ (exakt), $0,142857142857 \dots = 1/7$ (exakt).

a) Summan

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \frac{6}{3^5} + \frac{7}{3^6} + \frac{8}{3^7} + \frac{9}{3^8} + \dots$$

där prickarna betyder att samma mönster fortsätter i all oändlighet, är exakt lika med $2,xy$, där x och y är decimalerna. Gör en rimlig gissning av decimalerna efter uträkning på räknare.

b) Summan

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots$$

är *exakt* lika med ett heltal, om man skulle summera alla de oändligt många termerna. Vilket är heltalet? Gör en rimlig gissning med räknarens hjälp.

c) Exakta värdet av summan

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \dots$$

har bara en decimal när det skrivs i decimalform. Bestäm summans värde.

d) Bestäm *exakta* värdet, som är ett heltal, av summan

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

Om man tar med exakt 4 000 termer i summan, vad blir då det exakta värdet av summan?

1036 Om p och q är *heltal* så kan man inte åstadkomma

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \text{ (exakt).}$$

Pröva med många exempel! Däremot kan man hitta flera lösningar med heltal a , b , c och d till

$$\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = 2.$$

Bestäm så många som möjligt.

1037 Den amerikanske matematikern Ivan Niven har fått en speciell sorts tal uppkallade efter sig. Ett *nivalent* är ett positivt heltal som är delbart med sin egen siffersumma.

Om vi t ex tar talet 11 så är siffersumman 2, och eftersom 11 inte är delbart med 2 så

är 11 inte något nivalent. Går vi till 12 så får vi siffersumman 3, och eftersom 12 är delbart med 3 så är 12 ett nivalent.

Gör en lista på nivalent så långt som din räknare klarar att räkna med heltal exakt. Hittar du några niventvillingar, dvs två på varandra följande tal som båda är nivalent? Niventrillingar? Kommer nivalenten någonsin att ta slut? Om du inte tror det, ge då ett (eller flera) exempel på en följd av nivalent som aldrig tar slut.

Känner du till fakultet? Det brukar skrivas med ett utropstecken och definitionen lyder så här:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Fakultet innebär alltså att man tar produkten av alla tal t o m det aktuella talet. Vi skriver upp några numeriska exempel:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

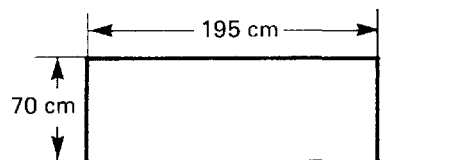
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

osv.

Lägg nu märke till att alla tre talen i våra exempel är nivalent. Hur är det längre fram i fakultetsföljden? Prova så långt som din räknare klarar.

1038 (Inte fullt så allvarligt menat, kräver räknare som visar minst 8 siffror i teckenrutan. Har du inte det så får du låna en sådan räknare innan du ger dig i kast med detta problem.)

Arkitekten Arne Nordberg var förtvivlad. Hans räknefel gjorde att hissdörrarna, som ju vanligtvis är så höga att en människa lätt skall kunna ta sig in, råkat få måtten omkastade så att hela huset försetts med hissar som såg ut så här:



Arne slet sitt hår och räknade efter hur stora förlusterna blev. Detta var vad han kom fram till och antecknade på sitt kladdpapper:

Dörröppningar	Kr 541 234,56
Anslutningar	Kr 2 589,63
Sladdar m m	Kr 7 674,98
Summa Kr	

Han summerade på sin räknare och fick

precis fram summan när hans vän Anders Stenbäck kom in genom dörren.

— Förtvivlat! Titta vad jag gjort! utropade Arne och pekade på skissen av hissen. Och så här stor förlust blir det.

Anders tittade på skissen, och sedan såg han att hela teckenrutan var fylld med siffror och insåg att förlusten var stor. Men eftersom han såg teckenrutan upp och ned, kunde han inte avgöra precis hur stor.

— Vad ska jag ta mig till? kved Arne.

Anders tittade på räknaren igen. Och plötsligt utropade han:

— Ja men Arne, du har ju lösningen där på räknaren! Du ser inte det jag ser, för jag ser teckenrutan upp och ned. Vänd på apparaten så får du se!

Arne vände ivrigt sin apparat, tittade och blev lugn med ens.

— Toppen, ja visst, så gör vi! Tack snälla du! Hiss för hyperbekväma, skulle man kunna säga.

Vad menade Arne med det?

Lösningar till problem 1001—1018



Roland Munther, Uppsala, är en av våra flitigaste problemlösare. Han har denna gång löst *samtliga* problem. Vi gratulerar och sänder en spännande bok.

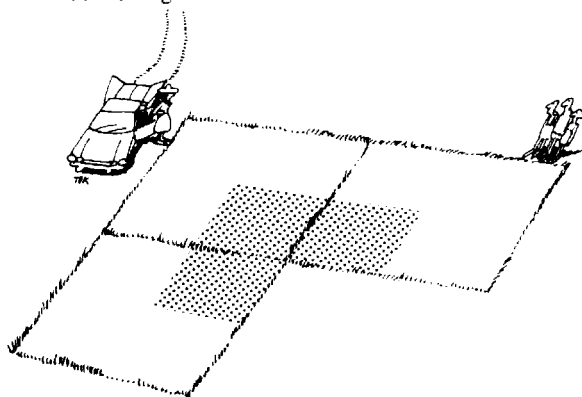
Vi har också fått många elevlösningar denna gång, vilket glatt oss mycket. Bok går till klass 5—6, Abbetorp skola, Rockneby, och Solängsskolan, Örkelljunga. *Grattis!*

1001 Varför skulle det stämma? Prova med andra belopp!

1002 4 bröder och 3 systrar.

1003 Porträttet föreställer en dotter eller systerdotter till den som skrivit baksidestexten.

1004 Se figur.



1005 Flink har en femtiokronorssedel, tre tior, en femma och fyra tvåkronor.

1006
$$\begin{array}{r} 9\ 567 \\ + 1\ 085 \\ \hline \end{array}$$

10 652

1007 $138 \cdot 138 = 19\ 044$ är en lösning. Finns det flera?

1008 Ja, det finns det. Det kan man inse, om man tänker sig att två personer startar samtidigt från var sitt håll. De kommer då att mötas vid en viss tidpunkt på en bestämd plats.

1009 Här finns det många lösningar. Här är Roland Munthers:

$$111 - 11 = 100$$

$$2222/22 + 22/22 - 2 = 100$$

$$2 \cdot 22 + 2 \cdot 22 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 100$$

$$33 \cdot 3 + 3/3 = 100$$

$$4444/44 - 4/4 = 100$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 = 100$$

$$555/5 - 55/5 = 100$$

$$55 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 - 5 = 100$$

$$6666/66 - 6/6 = 100$$

$$66 + 6 \cdot 6 - 6/6 - 6/6 = 100$$

$$7777/77 - 7/7 = 100$$

$$7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 + 7/7 + 7/7 = 100$$

$$888/8 - 88/8 = 100$$

$$88 + 88/8 + 8/8 = 100$$

$$99 + 99/99 = 100$$

$$9 \cdot 9 + 9 + 9 + 9/9 = 100$$

$$12 + 34 + 5 \cdot 6 + 7 + 8 + 9 = 100$$

1010 Här finns också många lösningar:

Summa 17, 2 fall

$$\begin{array}{r} 1 \\ 97 \\ 56 \\ 2843 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 89 \\ 64 \\ 2753 \end{array}$$

Summa 18, inga fall

Summa 19, 4 fall

$$\begin{array}{r} 1 \\ 98 \\ 53 \\ 4627 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 89 \\ 62 \\ 4537 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 96 \\ 54 \\ 3817 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 89 \\ 61 \\ 3547 \end{array}$$

Summa 20, 6 fall

$$\begin{array}{r} 1 \\ 87 \\ 63 \\ 5429 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 97 \\ 43 \\ 5618 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 79 \\ 61 \\ 5438 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 89 \\ 41 \\ 5627 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 97 \\ 23 \\ 5816 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ 89 \\ 31 \\ 5726 \end{array}$$

Summa 21, 4 fall

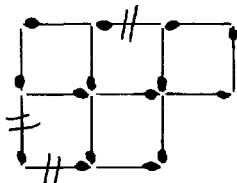
$$\begin{array}{r} 3 \\ 87 \\ 42 \\ 5619 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 78 \\ 52 \\ 6429 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 96 \\ 24 \\ 7518 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 69 \\ 51 \\ 7428 \end{array}$$

Summa 22, inga fall

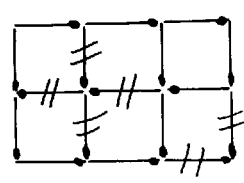
Summa 23, 2 fall

$$\begin{array}{r} 7 \\ 64 \\ 23 \\ 8519 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 56 \\ 31 \\ 8429 \end{array}$$

1011 a)



b)



(Fler tändsticksproblem hittar du i nr 2, 79/80.)

1012 20 trianglar (12 med sidan 1, 6 med sidan 2 och 2 med sidan 3)

1013 40 kvadrater (8 av den minsta sorten. Därefter i ordning 18, 9, 4 och 1)

1014 Om man klipper som figuren visar, passar bitarna inte exakt. Det kan man se om man väljer tillräckligt stor kvadrat.

1015 Detta problem presenterades första gången i Nämnaren nr 2, 78/79 och ledde till diskussion, olika lösningsförslag och följdproblem i nr 4, 78/79 och nr 1, 79/80. Här är en lösning:

Dela först upp mynten i tre högar med fyra i varje. Följande schema visar hur man kan göra:

12 mynt 1 12 0 = balans
+ = vägsålen ner
= vägsålen upp L = lätt mynt
T = tungt mynt

Första vägning	Resultat	Andra vägning	Resultat	Tredje vägning	Resultat	Innebär
1, 2, 3, 4 - 5, 6, 7, 8	+	1, 2, 9 3, 4, 5	+	1 2	0	1 T 5 L 2 T
			0	6 7	+	7 L 8 L 6 L
			+	3 4	+	3 T 4 T
		1, 9 10, 11	+	10 11	0	11 L 9 T 10 L
			+	1 12	0	12 L 10 T 9 L
			+	10 11	0	11 T 9 L 11 T
	- +	1, 2, 9 - 3, 4, 5	+	3 - 4	+	4 L 3 L
			0	6 - 7	0	6 T 8 T 7 T
			- +	1 - 2	+	2 L 5 T 1 L

1016 Tre mynt — bara.

Följande formel gäller för antalet kulor (x), som kan klaras med y vägningar:

$$x = \frac{1}{2}(3^y - 3)$$

1017 Dela upp mynten i tre högar med tre mynt i varje. Ta sedan två högar och lägg en på varje vägsåle. Då kan följande inträffa:

1 Det väger jämnt. I så fall finns det falska myntet i den tredje högen och saken är klar med ytterligare en vägning.

2 Det väger ojämnt och det falska myntet finns då i den lättare högen. Ur denna väljer man ut två mynt. Då finns följande möjligheter:

a) Mynten väger jämnt. Det tredje är förfalskat.

b) Det väger ojämnt. Det lättare är förfalskat.

1018 Ta ett mynt från trave 1, två mynt från trave 2, tre mynt från trave 3, o s v. Väg alla 55 mynten tillsammans. Vi vet vad de ska väga om de är äkta. Hushållsvägen ger övervikten i gram, och därmed vet vi från vilken trave vi tog de falska mynten.