Ett bi-problem

PER HÄGGMARK

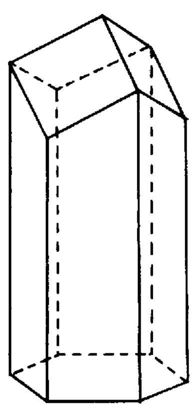
Vi är omgivna av en massa problem. Problem som berikar oss om vi löser dem tillsammans. Men det gäller att vara observant och verkligen fånga in och rätt formulera problemställningarna. *Per Häggmark,* Institutionen Lärarhögskolan i Mölndal, ger här ett exempel. Tillsammans med sina lärarkandidater på mellanstadielärarlinjen har han i en fördjupningskurs i matematik studerat hur en cell i en honungskaka är konstruerad.

Vårt mål var att tillverka en förstorad modell i papp av en cell i en honungskaka. Modellen borde vara såpass stor att den kunde användas som demonstrationsobjekt på en biologilektion.

De flesta känner till att bina förvarar den insamlade honungen i lika stora celler, som till större delen är formade som regelbundna sexsidiga prismor. Prismorna är gjorda av vax och bildar kakor, som hänger lodrätt i bikupan. Varje vaxkaka består av två lager av mot varandra ställda vaxprismor.

Mindre väl känt är att cellernas botten (se figuren där botten är riktad uppåt) består av tre sinsemellan kongruenta romber och att varje cell i sin botten gränsar mot tre andra celler, d v s har en romb som gemensam mellanvägg med var och en av de motställda granncellerna.

Redan i början av 1700-talet hade för biodling intresserade naturvetare funnit att de nämnda rombernas vinklar var i det närmaste 110° resp 70°.



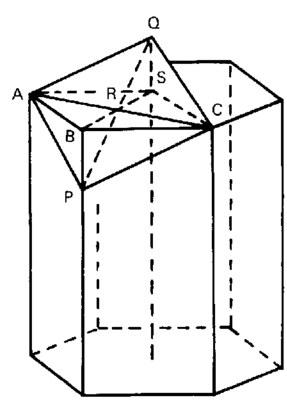
I litteraturen hade vi läst att honungscellerna var tillverkade så att byggnadsmaterialet användes så sparsamt som möjligt. Denna byggnadsprincip förklarade varför cellerna var formade som *regelbundna* sexsidiga prismor. Vi visste nämligen dels att av alla n-hörningar med konstant area, var den regelbundna n-hörningen den som hade den minsta omkretsen, och dels att tänkbara n-värden var $n=3$, $n=4$ och $n=6$.

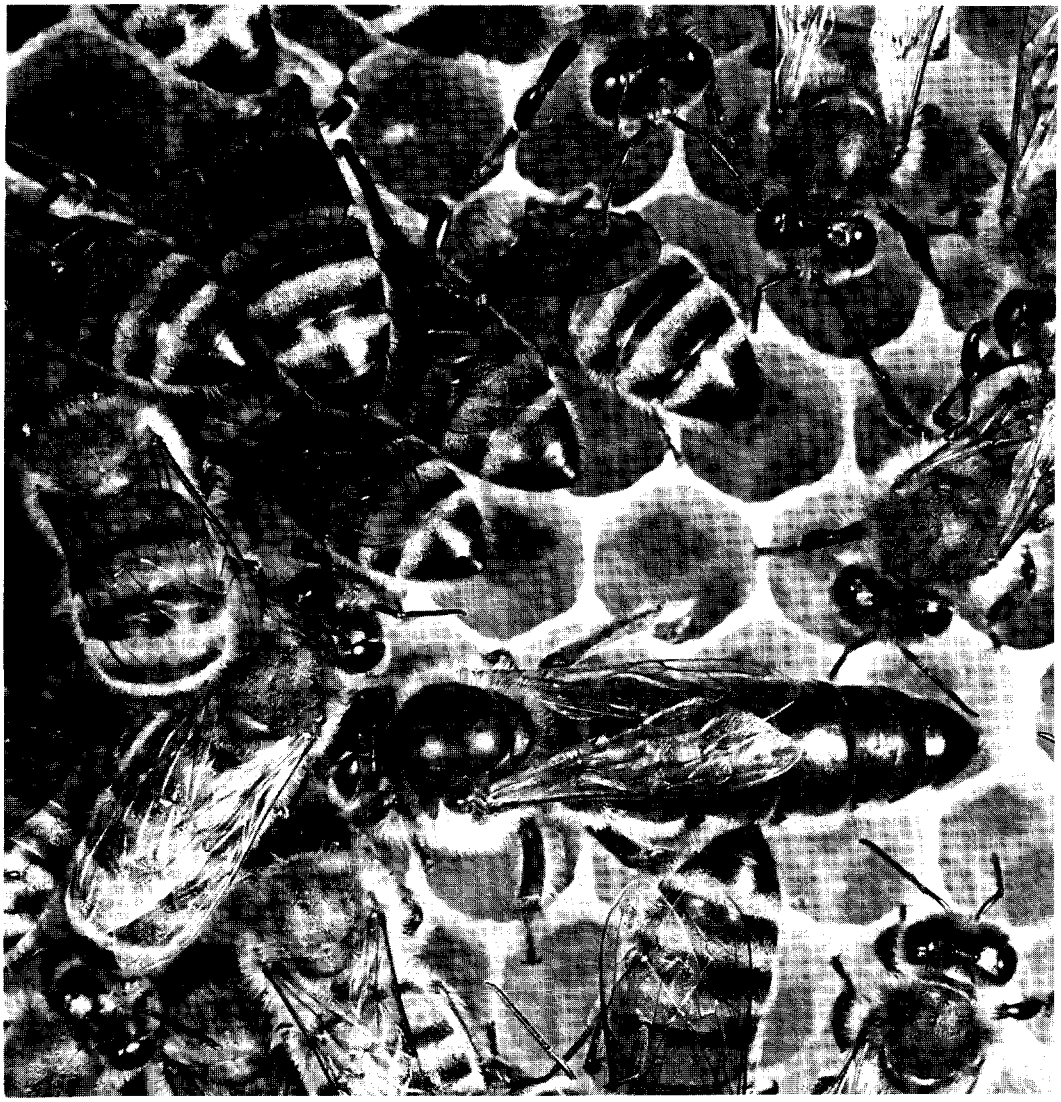
Andra n-värden skulle ge upphov till opraktiska och materialslukande mellanrum mellan cellerna.

Av de tre möjligheterna var $n=6$ den fördelaktigaste eftersom omkretsen hos en regelbunden n-hörning med konstant area blir mindre ju större n är.

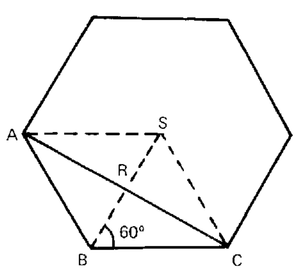
Vi ville nu övertyga oss om att prismats ”rombiska” avslutning var byggd enligt principen: Så litet byggnadsmaterial som möjligt skall användas.

Vi resonerade på följande sätt (se fig). Om man utgår från ett rakt, sexsidigt, regelbundet prisma, så kan honungscellens form erhållas ur prismat om tre av prismats hörn avskärs så som figuren antyder. Pyramiden med basytan ACP och spetsen B kan tänkas vriden kring AC, så att den bildar en pyramid med basytan ACQ och spetsen S. Om S ligger i planet genom A, B och C, så är fyrhörningen APCQ en romb.

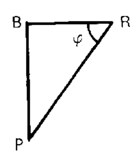




Om tre motstående hörn i prismat avskärs på detta sätt, och om de avskurna pyramiderna placeras på prismats basyta, så blir volymen av den erhållna kroppen lika stor som volymen av det ursprungliga prismat.



Begränsningsarean hos cellen förändras emellertid. Dess storlek beror av vinkeln mellan romberna och prismats basyta. Vi måste nu tillgripa litet matematik för att kunna avgöra hur cellens totala begränsningsarea beror av denna vinkel.



Vi förutsätter kännedom om de trigonometriska funktionernas definitioner.

Låt oss anta att sidan i prismats basyta är

a längdenheter och att det ursprungliga prismats höjd är h längdenheter. Då är

$$AB = BC = a,\ RB = \frac{a}{2} \text{ och } AC = a\sqrt{3}.$$

30-60-90-graderstriangel

Om vinkeln mellan romben APCQ och basytan i prismat är φ, så är vinkeln mellan RB och RP också φ.

Härav får vi

$$BP = \frac{a}{2} \cdot \tan \varphi \text{ och } RP = \frac{a}{2 \cos \varphi}$$

Rombens area blir

$$\frac{(AC) \cdot (PQ)}{2} = a\sqrt{3} \cdot \frac{a}{2 \cdot \cos \varphi} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2 \cdot \cos \varphi}$$

Varje sidoyta är ett parallelltrapets med arean

$$(h + (h - \frac{a}{2} \tan \varphi)) \cdot \frac{a}{2} = ah - \frac{a^2}{4} \cdot \tan \varphi$$

Den totala begränsningsarean består av arean av tre romber och sex sidoytor, dvs

$$A(\varphi) = \frac{3a^2 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \cos \varphi} + 6(ah - \frac{a^2}{4} \cdot \tan \varphi) =$$

$$= 6ah + \frac{3a^2}{2} \cdot (\frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi} - \tan \varphi),$$

där $0 < \varphi < 90°$.

$A(\varphi)$ antar sitt minsta värde när funktionen

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{\cos \varphi} - \tan \varphi$$

har minimum.

Med miniräknarens hjälp fann vi att $f(\varphi)$ har minimum då $30° < \varphi < 40°$. En noggrannare undersökning gav tabellerna

$\varphi°$	$f(\varphi)$
34,5	1,41440
35,0	1,41424
35,5	1,41423
36,0	1,41439

$\varphi°$	$f(\varphi)$
35,1	1,414222
35,2	1,414215
35,3	1,414214
35,4	1,414220

varav vi drog slutsatsen att minimum inträffar för $\varphi \approx 35{,}3°$

(Deriveringstekniken var inte känd av deltagarna i kursen, men den metoden ger

$$f'(\varphi) = \frac{\sqrt{3} \cdot \sin \varphi - 1}{\cos^2 \varphi},$$

$$f'(\varphi) = 0 \text{ när } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

och $f_{min} = \sqrt{2}$ för $\varphi \approx 35{,}26°$)

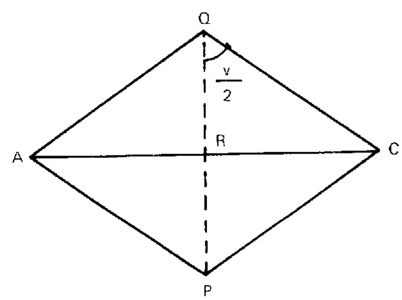
Vi kunde nu beräkna vinklarna i romben APCQ. Om vinkeln mellan QA och QC är v, så gäller att

$$\tan \frac{v}{2} = \frac{RC}{RQ} = \frac{\frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2 \cdot \cos \varphi}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \cos \varphi \approx \sqrt{3} \cdot \cos 35{,}3°$$

varav

$$v \approx 109{,}5°$$



Vi fann således att rombens vinklar är ungefär 109,5° resp 70,5°, vilka värden överensstämmer väl med de uppmätta värdena 110° resp 70°. Det förhåller sig tydligen så att bina tillverkar sina honungsceller, så att materialåtgången är minimal.

I själva verket hade vi gjort våra beräkningar på en något idealiserad honungscell. I verkligheten är det sexkantiga regelbundna prisma, som utgör huvuddelen av en honungscell, inte rakt utan lutar cirka 3° eller 4° snett uppåt från horisontalplanet, antagligen för att honungen inte skall rinna ut innan öppningen täckts med vax.

Man kan endast spekulera över hur det kan komma sig att bina instinktivt bygger sina celler i överensstämmelse med en ekonomisk sparsamhetsprincip.

Så till tillverkningen av pappmodellen. Vi konstaterade följande. Om man väljer det teoretiskt beräknade, exakta värdet

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

så blir förhållandet mellan diagonalerna i romben APCQ

$$\frac{AC}{PQ} = \sqrt{3} \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{2},$$

vilket innebär att vinklarna i romben är lika stora som vinklarna mellan diagonalerna i en pappersrektangel av formatet A4. Förhållandet mellan sidorna i ett A-format är som bekant $1:\sqrt{2}$ (se t ex Per Olof Lundgrens artikel i *Nämnaren* 3, 81/82). Denna enkla observation underlättade tillverkningen av modellen.

Vi valde att låta sidan i basytans regelbundna sexhörning vara 5 cm och cellens höjd 20 cm. Cellens höjd skall nämligen vara ungefär dubbelt så stor som cellens vidd. Om tillgången på nektar är god påstås bina göra ännu djupare vaxceller.

Vi åstadkom därmed en modell, som var cirka 20 gånger större (lateralförstoringen) än en bicell, och således rymde 8 000 gånger mer honung än en verklig honungscell.

Idén till denna verksamhet under tillvalskursen i matematik fann jag i en artikel av Martin Kindt, *Raumgeometrie auf der Oberstufe,* i boken *Fragen des Geometrieunterrichts,* utgiven av Steiner och Winkelmann, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln 1981.

I Kindts artikel finns en kompletterande diskussion om rymduppfyllande polyedrar, varav den så kallade rombiska dodekaedern är en (se figuren). Vissa hörn i denna dodekaeder, de som bildas av tre romber, har samma form som bicellens botten, vilket Kepler sägs ha observerat.