Hania Uscka-Wehlou

Svansklippning och andra förtjusande matematiska aktiviteter

Det är inte bara det nyttiga som är attraktivt i matematiken, det är också – och ibland framförallt – det estetiska som ger oss glädjen av och lust att lära matematik. Författaren berättar om sina glädjeögonblick i möten med matematik under uppväxten i åttiotalets Polen.

Matematik är för mig som konst. De mest glädjefyllda ögonblick i umgänget med matematik har för mig varit de som gett mig en känsla av förtjusning, inte de som väckt tanken att det här kan vara nyttigt. Även idag tänker jag på tillämpad matematik som på en portion broccoli och på den rena matematiken som en festlig efterrätt. I den här artikeln vill jag beskriva några små matematiska knep som i min barndom gav mig riktigt starka upplevelser i kontakt med matematikens skönhet.

Vänd på det, vetja!

Först en riktig klassiker. Enligt många källor fick unge Carl Friedrich Gauss följande uppgift av sin matematiklärare som ville vara ifred och därför gav sina elever arbetsintensiva uppgifter: *Summera alla naturliga tal från 1 till 40*. Eller så var det kanske 100. Den stackars läraren fick inte vara ifred särskilt länge eftersom Gauss direkt märkte att om man vänder på hela summan och adderar första talet med det sista, andra med näst sista, och så vidare, ända till det sista steget där man sätter ihop det sista talet med det första, får man sammanlagt 40 exemplar av 41. Och då ser man förstås direkt att den totala summan blir 40 gånger 41 delat med 2, vilket ger 820. Även idag minns jag min förtjusning när jag såg hur man kan lösa det jobbiga och arbetsintensiva problemet på ett fiffigt och överraskande enkelt sätt:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} S & = & 1 & + & 2 & +\cdots+ & 20 & +\cdots+ & 39 & + & 40 \\ S & = & 40 & + & 39 & +\cdots+ & 21 & +\cdots+ & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 41 & + & 41 & +\cdots+ & 41 & +\cdots+ & 41 & + & 41 \end{array}$$

som går att generalisera till följande formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

eller, ännu mer generellt, till summan av de första n elementen i en aritmetisk talföljd med differensen d, alltså $a_k = a_0 + kd$ för $k \in \mathbb{N}^+$ och a_0 som första element. En likadan beräkning:

$$
\begin{array}{rcccccccc}
S & = & a_0 & + & a_0 + d & + \cdots + & a_0 + (n-2)d & + & a_0 + (n-1)d \\
S & = & a_0 + (n-1)d & + & a_0 + (n-2)d & + \cdots + & a_0 + d & + & a_0 \\
\hline
2S & = & 2a_0 + (n-1)d & + & 2a_0 + (n-1)d & + \cdots + & 2a_0 + (n-1)d & + & 2a_0 + (n-1)d
\end{array}
$$

leder till formeln:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_0 + d \cdot \frac{(n-1)n}{2}.$$

Skriv om och observera

En annan uppgift som jag minns från min barndom fick vi se under våra lördagsmöten på den så kallade *Matematiska cirkeln* där matematikintresserade grundskolebarn från hela staden Toruń träffades en gång i veckan för att under ledning av två lektorer från stadens universitet diskutera intressanta matematiska problem. Dessa möten skedde på Institutionen för fysik i stadens centrum.

Institutionen för fysik vid Kopernikus universitet i Toruń.

Många uppgifter som vi räknade där fick olika lösningsmetoder och jag kände mig mycket stolt om jag lyckades få ihop den enklaste och mest eleganta lösningen. Uppgiften jag vill berätta om nu är att beräkna följande summa:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1984 \cdot 1985} + \frac{1}{1985 \cdot 1986}.$$

(Många av uppgifterna vi fick innehöll på något sätt årets tal.) I det här fallet var tricket att klyva varje bråk i två på ett sätt som gör att man kan stryka massor. En viktig sak att notera är att differensen mellan faktorerna i nämnaren till varje bråk är lika med 1, alltså täljarens värde:

$$\frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1985-1984}{1984 \cdot 1985} + \frac{1986-1985}{1985 \cdot 1986}.$$

Nu klyver vi varje bråk i två

$$\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1985}{1984\cdot 1985}-\frac{1984}{1984\cdot 1985}+\frac{1986}{1985\cdot 1986}-\frac{1985}{1985\cdot 1986}$$

och får efter förkortning något som vi kan hantera utan svårighet:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1984}-\frac{1}{1985}+\frac{1}{1985}-\frac{1}{1986}=1-\frac{1}{1986}=\frac{1985}{1986}.$$

Återigen har vi reducerat en till synes arbetsintensiv uppgift till något riktigt enkelt! Vårt resultat kan skrivas på ett kortare sätt:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Likadant kan vi göra med följande produkt:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right).$$

Ser jobbigt ut! Men det går att göra något åt detta. Vi skriver om uttrycket lite och funderar vad vi kan göra med det:

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\left(1-\frac{4}{49}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right).$$

Kommer vi att kunna stryka ett antal faktorer för att förenkla bråken? Vi försöker att ta in ettorna i bråken:

$$\frac{1-4}{1}\cdot\frac{9-4}{9}\cdot\frac{25-4}{25}\cdot\frac{49-4}{49}\cdots\frac{(2n-3)^2-4}{(2n-3)^2}\cdot\frac{(2n-1)^2-4}{(2n-1)^2}.$$

Nu då? Försök med *konjugatregeln*: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. Vår produkt blir:

$$\frac{(1-2)(1+2)}{1}\cdot\frac{(3-2)(3+2)}{9}\cdot\frac{(5-2)(5+2)}{25}\cdot\frac{(7-2)(7+2)}{49}\cdots$$
$$\cdots\frac{(2n-5)(2n-1)}{(2n-3)^2}\cdot\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)^2}$$

alltså:

$$\frac{-3}{1}\cdot\frac{5}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 7}{5\cdot 5}\cdot\frac{5\cdot 9}{7\cdot 7}\cdots\frac{(2n-7)(2n-3)}{(2n-5)(2n-5)}\cdot\frac{(2n-5)(2n-1)}{(2n-3)(2n-3)}\cdot\frac{(2n-3)(2n+1)}{(2n-1)(2n-1)}.$$

Efter en noggrann observation av raden ovan ser vi att allt utom det sista bråket förkortas bort! Och minustecknet från första bråket är förstås också kvar. Då har vi följande resultat. För varje positivt naturligt tal n gäller

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{4}{(2k-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}.$$

Observera att alla dessa formler kan bevisas enkelt med hjälp av matematisk induktion. Detta förutsätter dock att man vet svaret i förväg eller lyckas med att gissa det rätt eller komma fram till det på något annat sätt. Och att eleverna är bekanta med induktion. Metoderna som presenterats kan införas redan på högstadiet och motivera elever att leta efter egna fiffiga knep vid olika beräkningar.

Decimalbråk: svansklippning sätt 1

Alla vet hur man ska omvandla vanliga bråk till bråk i decimalform: ta papper och penna eller en miniräknare och utför divisionen av täljaren med nämnaren. Inga problem. Men tvärt om då? Hur ska man veta vilket vanligt bråk är representerat med en given decimalutveckling? Saken är enkel om decimalutvecklingen är ändlig.[1] Har den n siffror efter decimalkommat, så motsvarar den bråket som har det n-siffriga talet i täljaren och 10 upphöjt till n som nämnare, t ex: $0,93751 = 93\,751/100\,000$.

Men hur ska man veta vilket vanligt bråk som motsvarar en oändlig decimalutveckling? Är utvecklingen *icke-periodisk*, då representerar den inget bråk, förstås, utan ett *irrationellt tal*. Då är det helt omöjligt att bedöma vilket tal det är, eftersom vi högst kan se ett ändligt antal av den oändliga mängden av siffror i utvecklingen. Är utvecklingen däremot *periodisk* (och här menar vi periodisk från ett visst ögonblick, inte nödvändigtvis hela vägen), då finns det en fin metod! En metod som går ut på att skära bort den oändliga svansen och arbeta med ändliga bitar. Några exempel.

- Decimaltalet $0,333\ldots = 0,(3)$ motsvarar bråket $1/3$. Men hur ska man bevisa det? Beteckna talet med x, alltså $x = 0,333\ldots$ Detta betyder att $10x = 3,333\ldots$ och, om vi subtraherar x från $10x$, blir vi av med hela den oändliga svansen! Vi får nämligen: $10x - x = 3,(3) - 0,(3) = 3$. Men vänsterledet är lika med $9x$. Vår ekvation blir alltså $9x = 3$, vilket ger $x = 1/3$, precis som väntat.
- Skulle vi behöva undersöka decimalutveckling med periodlängd 4, multiplicerar vi vårt tal med $10^4 = 10\,000$ istället, t ex $x = 0,(1973)$ som ger $10\,000x = 1973,(1973)$ och $10\,000x - x = 1973$. Det ger $9999x = 1973$ och därmed $x = 1973/9999$.
- Om vår decimalutveckling är periodisk bara från ett visst ögonblick, t ex $x = 0,375(91)$, gör vi samma sak som förut, men med en liten anpassning i början. Detta innebär att vi först anpassar vårt tal till vår metod genom att multiplicera det med 10 upphöjt till 3, eftersom det är där perioden börjar: $1000x = 375,(91)$. Nu kan vi tillämpa vår metod på $1000x$. Periodlängden är 2, vilket kräver multiplikation med en faktor hundra. $100 \cdot 1000x = 37\,591,(91)$ alltså $100\,000x - 1000x = 37\,591,(91) - 375,(91)$ vilket gör att svansen försvinner och vi får $99\,000x = 37\,216$ och till slut $x = 37\,216 / 99\,000$.

Nu kan vi tackla alla periodiska decimalutvecklingar! Kolla gärna tillsammans med era elever följande decimalutvecklingar: 0,(142857); 0,(285714); 0,(428571); 0, (571428); 0,(714285); 0,(857142). Ett tips: försök gärna att förkorta så långt som möjligt.

---

1. För enkelhetens skull kommer vi att prata enbart om positiva egentliga bråk, alltså om tal som är större än 0 men mindre än 1.

Kedjebråk: svansklippning sätt 2

Förutom vanliga bråk (alltså sådana med en täljare och en nämnare) och decimalbråk finns det också *kedjebråk*. Dessa kan ha oändligt många nämnare och täljare och ser ut på följande sätt:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

där $a_1, a_2, \ldots$ är positiva heltal. Ibland skriver man i stället $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ för att spara utrymme. Om sådan kedjebråksutveckling är ändlig, räknar man ut dess värde nerifrån och upp som i följande exempel:

$$1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{2}} = 1 + \frac{2}{11} = \frac{13}{11}\,.$$

Fler våningar innebär mer räknearbete, men principen är alltid densamma: börja med nedersta våningen, utför additionen där, vänd på resultatet och fortsätt med nästa våning, och så hela vägen upp. Varje rationellt tal[2] har en *ändlig* kedjebråksutveckling. Stor skillnad jämfört med decimalutvecklingen!

Eftersom kedjebråk inte ingår i kursplanen i matematik, vill jag nämna att processen för att hitta kedjebråksutvecklingen av ett bråk är identisk med Euklides algoritm för att bestämma *största gemensamma delare* till täljaren och nämnaren i bråket. Vi illustrerar det med ett exempel. Först genomför vi Euklides algoritm för talen 17 och 31:

$$\begin{aligned} 31 &= \mathbf{1} \cdot 17 + 14 \\ 17 &= \mathbf{1} \cdot 14 + 3 \\ 14 &= \mathbf{4} \cdot 3 + 2 \\ 3 &= \mathbf{1} \cdot 2 + 1 \\ 2 &= \mathbf{2} \cdot 1 \end{aligned}$$

Nu jämför vi detta med kedjebråksutvecklingen av bråket 17/31:

$$\frac{17}{31} = \frac{1}{\frac{31}{17}} = \frac{1}{1 + \frac{14}{17}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{17}{14}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{14}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{14}{3}}}}$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{2}{3}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}} = \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{4} + \cfrac{1}{\mathbf{1} + \cfrac{1}{\mathbf{2}}}}}}\,.$$

Vi märker att talen 1, 1, 4, 1, 2 (markerade med fetstil) dyker upp i båda beräkningarna. Men vad händer om kedjebråksutvecklingen är *oändlig*? Vi vet att den motsvarar något irrationellt tal, men vilket?

2. Här begränsar vi oss till positiva tal, men det är bara för enkelhetens skull; man kan förstås kedjebråksutveckla negativa tal.

Det visar sig att alla kvadratiska irrationella tal[3] (på engelska *quadratic irrational* eller *quadratic surd*) – och bara de – har *periodisk kedjebråksutveckling*. Frågan vi nu kommer att svara på är: hur kan vi hitta det kvadratiska irrationella talet om vi vet vad dess kedjebråksutveckling är? Svaret får vi återigen genom att utföra en svansklippning, fast på ett annat sätt än vid decimalutveckling. Låt oss säga att vi ska ta reda på vilket tal som motsvarar följande kedjebråk:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}\,.$$

Vi har kallat kedjebråket x och det är ju tydligt att det gäller att $x = 1 + 1/x$ vilket i sin tur är ekvivalent med ekvationen $x^2 - x - 1 = 0$, som har två rötter: en negativ och en positiv. Vi måste förstås förkasta den negativa roten eftersom talet vi letar efter är positivt. Svaret blir alltså, t ex med användning av *pq*-formeln, $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Det blir lite svårare med följande exempel, hämtat ur *Problemlösning är # 1* av David Berglund:

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots].$$

Svårare, men fortfarande fullt möjligt att lösa med elementära metoder. Vi ser nämligen att talet y uppfyller följande ekvation:

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + y}}\,,$$

där högerledet kan skrivas om enligt följande:

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + y}} = 1 + \frac{1}{\frac{y+2}{1+y}} = 1 + \frac{y+1}{y+2} = \frac{2y+3}{y+2}.$$

Vårt tal löser alltså ekvationen $y = (2y + 3)/(y + 2)$ som är ekvivalent med ekvationen $y^2 - 3 = 0$ vars positiva rot är lika med $\sqrt{3}$.

Det är värt att nämna att transcendenta tal också kan ha regelbundna, fast förstås inte periodiska, kedjebråksutvecklingar. Så har till exempel talet e kedjebråksutveckling med ett regelbundet mönster:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, \ldots].$$

Upprepad rottagning (itererad radikal): svansklippning sätt 3

Till slut ett till exempel på svansklippning som jag inte såg i min barndom men väl läste om i Berglunds bok. Det förefaller nästan osannolikt, men för vissa (t o m oändligt många) naturliga tal n beskriver uttrycket

$$\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \ldots}}}$$

3. Kvadratiska irrationella tal är en benämning för alla tal som är irrationella rötter till någon andragradsekvation med rationella koefficienter. Sådana tal kan skrivas upp som $(a + b\sqrt{c})/d$ där a, b, c, d är heltal, $d \neq 0$ och $c > 0$ inte är kvadrat till något heltal.

ett heltal! Det förefaller förstås inte så osannolikt för $n = 0$, men för andra naturliga tal är det rätt så oväntat. Varför är det så? Låt oss beteckna talet med x. Då har vi $x = \sqrt{n + x}$. Eftersom $x > 0$ får vi kvadrera ekvationen utan att frukta att vi får in några falska lösningar. Vår ekvation är alltså ekvivalent med: $x^2 - x - n = 0$, $x > 0$, och vi kan lösa den för varje positivt heltal n. Ekvationen kan skrivas om som $x(x-1) = n$. Detta betyder att för $n = 2, 6, 12, 20, \ldots, k(k + 1), \ldots$ är hela den upprepade roten (itererade radikalen) ett heltal!
Alltså har vi:

$$
\begin{aligned}
2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}} \\
3 &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}} \\
4 &= \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \ldots}}} \\
5 &= \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots}}}
\end{aligned}
$$

och så vidare, och så vidare. Man kan också undersöka pq-formeln för lösningar till ekvationen $x^2 - x - n = 0$ för varje positivt naturligt n och se att uttrycket under rottecknet i pq-formeln är en fjärdedel av kvadraten av ett heltal för $n = k(k+1)$ för varje positivt heltal k. Slutligen noterar vi att vi i synnerhet för $n = 1$ får följande förbluffande resultat:

$$
\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}\,.
$$

Det är faktiskt två av många framställningar av talet φ, talet som representerar gyllene snittet. Titta gärna på Wikipedia för att se fler formler för φ.

Enkla lösningar är tjusiga

Nu, trettio år senare, i ett annat land och en annan situation, tycker jag fortfarande att alla de matematiska trick som ger komplicerade uppgifter enkla lösningar är tjusiga, helt enkelt. Jag önskar att många elever får möjlighet att upptäcka matematikens skönhet och elegans och att de får uppleva många förtjusningar i den kontakten.

LITTERATUR

Berglund, D. (2005). *Problemlösning är # 1.* Stockholm: Liber AB.
Bobiński, Z., Nodzyński, P. &Uscki, M. 2004. *Liga zadaniowa* (tävlingsuppgifter i matematik). Aksjomat Förlag, Toruń.
Khinchin, A. Ya. (1997). *Continued fractions.* Dover Publications, third edition.
Uscka-Wehlou, H. (2009). *Digital lines, sturmian words, and continued fractions.* Doktorsavhandling vid Uppsala universitet.
https://sv.wikipedia.org/wiki/Gyllene_snittet