Konsten att beräkna π

LENNART RÅDE

För en tid sedan skrev en högstadieelev till Nämnaren och ville ha π med de första etthundra decimalerna för att lära sig utantill!

Talet har alltid fascinerat och lockat, inte minst sifferjägarna. Här berättar *Lennart Råde* om talets historia och om metoder att bestämma närmevärden. Han tar också upp korrespondens med läsare och användare av tidigare artiklar i serien — och nya datoraktiviteter.

Ett tal med historia

Talet π är ett fascinerande tal med en fängslande historia, som man kan ta del av i den intressanta boken *A History of* π, som är skriven av den tjeckiskfödde elektroingenjören Petr Beckmann. Här skildras upptäckten av π och hur de första beräkningarna av närmevärden till π utfördes av egyptier och greker. Vidare berättar boken om hur många kända matematiker som Huygens, Newton, Leibniz och Gauss bidragit till talets matematik. Att π är ett irrationellt tal visades 1761 och att det är transcendent dvs inte kan vara rot till en algebraisk ekvation visades 1882. I Petr Beckmanns bok ägnas ett kapitel åt "sifferjägarna" dvs de personer, som under tidernas lopp beräknat π med allt fler och fler decimaler från den holländske matematikern Adriaan Anthoniszon (1527—1607), som beräknade π med sex decimaler fram till William Shanks, som 1873 publicerade ett närmevärde med 707 decimaler, av vilka dock tyvärr de 180 sista var felaktiga. I juli 1984 meddelade dagstidningarna att man vid Tokyo University beräknat π med 16 miljoner decimaler. Beräkningen gjordes av en superdator och fullbordades på 24 timmar. Det rapporterades att man inte tänkte publicera alla decimalerna.

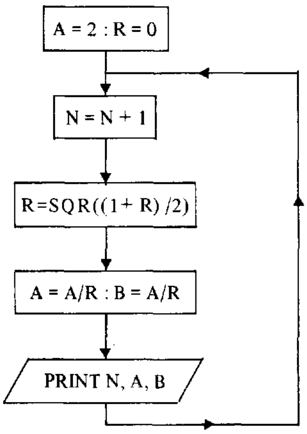
Arkimedes metod

Arkimedes från Syrakusa (287—212 f Kr) beräknade närmevärden till π genom att beräkna omkretsarna av regelbundna månghörningar, som är in- och omskrivna en given cirkel. Arkimedes metod beskrivs på följande sätt i en av våra äldsta svenska läroböcker i matematik *Tillämpning av Arithmetiken, Geometrin och Plana Trigonometrin uti Allmänna Lefvernet,* utgiven av Fredric Palmquist år 1750.

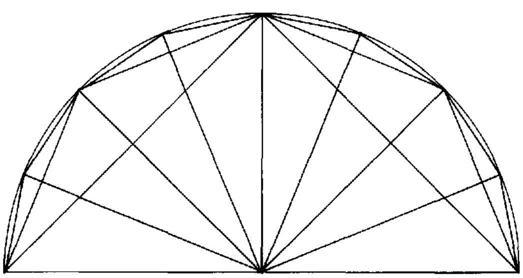
> *Om vi föreställa oss en ordentelig mångkant, af ganska många eller små sidor, vara inneskrifven i en sirkel, finnes lätteligen, at hvar och en sida föga skiljer sig från bågen, hon subtenderar, och at den lille skilnaden är mindre, då sidorna äro många, ändå de äro få; följakteligen måste summan av alla dessa sidor föga skilja sig från den omskrefne sirkelens omkrets. Dock, som hvar och en sida i sjelfva verket är mindre än bågen, hon subtenderar, så är och summan av alla dessa sidor, det är, månghörningens omkrets verkeligen mindre, än den omskrefne sirkelens omkrets. Om vi sedan föreställa oss kring samma sirkel en mångkant vara omskrefven, som med den inneskrefne är likformig, så är klart, at i det*

stället den inneskrefne mångkantens omkrets vara mindre, än sirkelen, är nu den omskrefnas större. Detta är den vägen, som Archimedes, Ludolf från Ceulen, med flera av de forne geometrer följt då de upptäkt, att diamatern uti en sirkel förholler sig till omkretsen som 1 til 3,141 592 653 589 793 238 426 433 832 795.

Lägg märke till att Palmquist ger ett närmevärde med 30 decimaler. Flödesdiagrammet i figuren beskriver Arkimedes metod i form av ett datorprogram i BASIC.



Variabeln N anger antalet iterationer och variablerna A och B anger längderna av regelbunda polygontåg med 1, 2, 4, 8,... sidor (mångkanter i Palmquists terminologi), som är in- respektive omskrivna en halvcirkel med radien 1, se figur.



Vi går inte här in på den matematiska eller geometriska härledningen av denna algoritm utan hänvisar till böckerna (2) och (3) i litteraturförteckningen nedan. Med ett program fick jag ett närmevärde till π med 14 korrekta decimaler efter 29 iterationer.

π med 200 decimaler

$\pi \approx$ 3. 14159 26535 89793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196

Detta närmevärde beräknades första gången av tysken Johann Martin Zackaris Dase, om vilken berättats i en tidigare artikel i Nämnaren i denna serie. Ett närmevärde med 1 000 decimaler finns i (4).

Förbättring av Arkimedes metod med Richardson-extrapolation

Om man vid körning av ett datorprogram enligt programmet ovan skriver ut felen $\pi - A$ och $B - \pi$, så finner man att felet vid varje approximation ganska nära multipliceras med 1/4. Konvergensfaktorn är 1/4. Om A_n är närmevärdet efter n iterationer, så gäller alltså

$$A_n \approx \pi + k/4^n.$$

Härav följer att

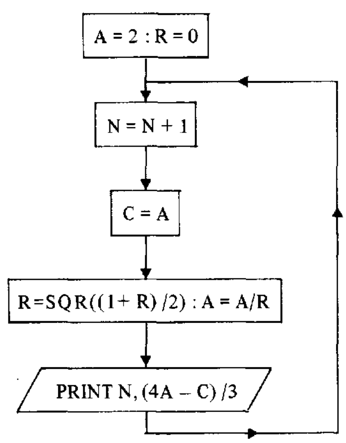
$$A_{n+1} \approx \pi + k/4^{n+1}$$

och alltså att

$$\pi \approx (4A_{n+1} - A_n)/3.$$

Denna metod att förbättra konvergensen hos ett iterationsförfarande kallas *Richardson-extrapolation.* Metoden tillämpas i programmet i figuren nedan. Med ett sådant program fick jag ett närmevärde med 14 korrekta decimaler redan efter 12 iterationer.

Arkimedes algoritm, förbättrad version



Andra metoder att beräkna π

Den medeltida filosofen Nicolaus Cusanus upptäckte år 1450 en elegant förbättring av Arkimedes metod. Denna beskrivs i böckerna (2) och (3). I vår tid har en ytterst snabb algoritm konstruerats. Den kallas Brent-Salamins algoritm och den utnyttjar följande formler. Först beräknas två talföljder a_n och b_n med startvärdena $a_0 = 1$ och $b_0 = 1/\sqrt{2}$ enligt följande rekursiva formler

$$a_n = (a_{n-1} + b_{n-1})/2, \; b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}.$$

Sedan definieras

$$d_n = a_n^2 - b_n^2$$

och slutligen beräknas A_n enligt formeln

$$A_n = \frac{4a_{n+1}^2}{1 - (4d_1 + 8d_2 + \ldots + 2^{n+1} d_n)}$$

I själva verket är det denna algoritm som användes då man vid Tokyo University beräknade π med 16 miljoner decimaler. Det rapporteras att redan A_{16} ger ett närmevärde till π med 178 000 korrekta decimaler.

Datoraktiviteter

Här följer nu en svit övningar:

1. Beräkna närmevärden till π med Arkimedes algoritm och Arkimedes förbättrade algoritm.

2. Den förbättrade algoritmen ovan kan i sin tur förbättras på liknande sätt. Härled hur det ska ske och kör motsvarande program på dator eller programmerbar miniräknare.

3. Beräkna närmevärden till π med Brent-Salamins algoritm.

4. År 1593 publicerade den franske amatörmatematikern François Viète, Seigneur de la Bigotière, följande formel.

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \ldots$$

Använd den för att beräkna närmevärden till π.

5. År 1655 publicerade John Wallis, professor i geometri i Cambridge i England, följande formel.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots$$

Använd Wallis formel för att beräkna närmevärden till π.

Hör gärna av Dig med kommentarer, resultat och program till dessa övningar. Adressen till författaren är Matematiska Institutionen, Chalmers Tekniska Högskola, 412 96 Göteborg.

Korrespondens

Ove Carlsson vid Töreboda Centralskola har i tre trevliga brev berättat om hur han och hans elever i teknologi i årskurs 9 arbetat intensivt med problem i denna artikelserie. Eleverna i Töreboda skriver sina program huvudsakligen i PASCAL och de använder en HP 150 B dator med bläckstråleskrivare. Eleverna i Töreboda har med väl utformade program funnit att

$$79\,532\,853 \cdot 93\,758\,479 = 745\,687\,932\,781\,587$$

samt att

$8^{16} = 281\,474\,976\,710\,656$. Vidare har de mycket riktigt kunnat konstatera att det bara finns ett fakultetstal med tre siffror nämligen 145, ty

$$145 = 1! + 4! + 5!.$$

De har också skrivit trevliga primtalsprogram och program i anslutning till hagelkornstalen. Vidare har de med programmerbara miniräknare behandlat följande problem.

1) Studera förhållandet mellan volym och avståndet från toppen till vätskenivån i ett klot, som är delvis fyllt med vätska.

2) Vilken längd kan en bräda ha som en snickare bär horisontellt när han ska passera ett hörn i en korridor, om de båda korridorbredderna är 2 respektive 3 m. (Detta är ett klassiskt problem som ibland formuleras i anslutning till president Lincolns säng!)

3) En person går på auktion. Han skall köpa 100 djur för tillsammans 500 kr. En ko kostar 50 kr, en gris 10 kr och en höna 1 kr. Hur många kor, grisar och höns kan han köpa?

Kjell Jarl tjänstgör vid Jonsboskolan i Långshyttan. Han skriver och berättar att hans skola skaffat ett Microbee Stjärnnät med en huvudstation och 12 arbetsstationer. Kjell har utnyttjat anläggningen för att skriva program för hagelkornstal och fakultetstal. Hans program ger väldigt fina utskrifter.

Tack, Ove Carlsson och Kjell Jarl! Men är det bara i Töreboda och Långshyttan som det finns personer med intresse för dylika datoraktiviteter?

Litteratur

(1) P. Beckmann, *A History of* π, St Martins Press, New York 1971

(2) A. Engel, *Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt,* Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1977

(3) L. Råde, *Äventyr med räknedosan,* Biblioteksförlaget, Stockholm 1976

(4) *ALFA, Matematisk handbok,* Studentlitteratur, Lund 1982