JONAS HALL

Världens största tal – II

Stora tal är både svåra att föreställa sig och en utmaning att arbeta med. Tusen, miljard och biljon bleknar alla inför Grahams tal. Här får vi följa med på en hisnande färd ut i de stora talens rymd.

Lasse Berglund skrev i Nämnaren nr 1, 2005 om världens största tal som använts i en seriös beräkning. Talet som beskrivs där är dock inte det största som använts på detta sätt. Sedan 1977 innehas världsrekordet av ett tal som inte ens kan skrivas med vanliga tiopotenser – *Grahams tal.*

Stora tal – och hur man skriver dem – ingår i den reguljära matematikundervisningen och är ofta en källa till stimulans för duktiga elever och matematiktävlingar. Världens största tal som faktiskt använts i en seriös matematisk beräkning är sedan 1977 Grahams tal, uppkallat efter Ronald Graham som är verksam vid University of California, San Diego.

Precis som Skewes tal som Lasse Bergström beskrev, som torde vara värdens näst största använda tal, är Grahams tal den övre gränsen för svaret på ett tämligen komplicerat problem som handlar om att färga hyperkuber på ett speciellt sätt. Graham lyckades inte lösa problemet, bara ange att svaret måste ligga mellan 6 och ett väldigt stort tal – Grahams tal.

Hur stort är då Grahams tal? För att kunna svara på den frågan måste vi först lära oss ett speciellt sätt att skriva tal, en särskild notation. Eleverna lär sig ju detta vid ett flertal tillfällen under sin skolgång. De ska lära sig uttrycka tal i decimalform, i bråkform, i procentform och i potensform. Att då t ex i skolår nio gå in på ytterligare en notation upplevs inte som särskilt svårt av eleverna och deras taluppfattning kommer garanterat att vidgas efter denna övning. Så låt oss nu utan vidare omsvep beskriva hur man bygger upp Grahams tal.

Vi börjar med att införa beteckningen ↑ som lämpligen uttalas ”pil”.

3↑3 (”tre pil tre”) betyder precis samma sak som $3^3 = 27$, precis som på en del räknare som har symbolen $\boxed{\wedge}$ för ”upphöjt till”.

3↑↑3 låter vi betyda 3↑ (3↑3) dvs 3↑27 = 3^{27}

vilket redan är ett väldigt stort tal, nämligen 7 625 597 484 987. Detta tal kan dock fortfarande lätt skrivas, t ex som 3^{3^3} Vi lägger märke till att talen snabbt ökar i storlek.

3↑↑4 betyder på samma sätt $3^{3^{3^3}}$

3↑↑↑3 = 3↑↑ (3↑↑3) är ännu större.

3↑↑ (3↑↑3) = 3↑↑7625597484987 eller med

vår vanliga notation $3^{7625597484987^{762559484987}}$ vilket är ett tal som redan börjar bli svårt att fatta hur stort det är. Det är fortfarande mindre än Skewes tal men av samma ”storleksordning” vilket i det här sammanhanget betyder att det krävs 4 nivåer med tiopotenser för att kunna uttrycka det enkelt. För elever på gymnasiet blir det en annorlunda övning i att förenkla logaritmer om man försöker skriva det som ett ”torn” av tiopotenser. Det kan nu vara lämpligt att påminna oss om att antalet partiklar i den synliga delen av universum uppskattas till ca 10^{80} st vilket är 10^{20}, dvs 100 triljoner gånger mindre än 10^{100} = 10^{10^2}= 1 googol.

3↑↑↑↑3 blir då givetvis = 3↑↑↑ (3↑↑↑3) vilket på en gång spränger alla gränser för vad vi är vana vid. Detta tal är tveksamt om man kan uttrycka enkelt med tiopotenser eller ens uppskatta tiopotenstornets höjd. Det vore roligt om någon ville försöka, hör gärna av er om det går. Men detta är bara början i vårt försök att konstruera Grahams tal. Häng med nu!

Talet 3↑↑↑↑3 kallar vi för g_1 vilket är det första talet i en serie tal som leder fram till Grahams tal. Vi konstruerar nu talet

g_2= 3↑↑...↑3 som har g_1 pilar, dvs 3↑↑↑↑3 stycken pilar. Detta är ett ofantligt tal som på intet sätt kan skrivas med vanliga tiopotenser. Kom ihåg att om vi använder en atom för varje pil så räcker antalet atomer i den synliga delen av universum inte ens till för att skriva detta tal eller Skewes tal på vanligt sätt! Detta ofantligt stora tal kallar vi alltså g_2 Nästa tal konstruerar vi på samma sätt, dvs vi skriver

g_3= 3↑↑...↑3 i vilket det finns g_2 stycken pilar. Detta tal är förstås kraftigt mycket större än g_1, som ju redan var ofantligt. Nu fortsätter vi i nästa steg att konstruera g_4 på samma sätt med g_3 st pilar.

Allmänt är: g_n= 3↑↑...↑3 i vilket det finns g_{n-1} st pilar. Grahams tal är det sextiofjärde talet i denna serie, alltså g_{64}.

Som kuriosa kan man komma ihåg att Grahams tal är den övre gränsen för svaret på ett komplicerat problem. Men vad är då svaret på problemet? Ännu har ingen löst det men många experter trodde tills 2003 att svaret var just 6. År 2003 bevisades det att talet måste vara minst 11.

Som Graham skrev i sin ursprungliga artikel: *Clearly, there is some room for improvement here.*

Efter denna virtuella resa i talrymden så bör du fråga dig själv om du lärt dig något nytt, fått någon upplevelse du inte haft förut eller ändrat uppfattning om något du länge tyckt. Om svaret på någon av dessa frågor är ja så är det här troligen relevant att ta in i undervisningen.

Man kan redan från början påpeka för eleverna att de inte behöver förstå allt det tekniska för att kunna hänga med på resan och få en glimt av de stora talens värld. En del elever kommer kanske att tycka att Grahams tal är oändligt stort – ett utmärkt tillfälle att ta upp oändlighetsproblematiken utan att pressa den på eleverna.

Efter en genomgång om detta kan eleverna kanske själva kan få hitta på notationer. Be t ex eleverna skriva ett så stort tal de kan med endast 30 tecken. Här ett exempel:

Låt M*=$M^{M^{M^{\cdots}}}$ (M steg). Bilda 9****

I skolår nio börjar eleverna fokusera på betygskriterier mer och mer för varje provtillfälle. I det här sammanhanget kan man lämpligen föra en diskussion om matematikens språk och symboler. Det är min åsikt att eleverna behöver få en del inblickar i högre matematik för att förstå att matematiken är något mycket mer än ett sätt att räkna ut x, att rita trianglar eller att fråga 50 människor om färgen på deras sockor och rita diagram över svaren. Till varje språk hör en kultur, ett förhållningssätt, en filosofisk riktning som är mycket mer än plottret av uppgifter i dagens svenska läromedel. Som lärare i matematik är det vår uppgift att förmedla detta till eleverna eftersom läromedlen så sällan lyckas göra det.

LITTERATUR

The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers, av David Wells, Penguin 1986 En uppslagsbok om tal sorterad i storleksordning. Grahams tal står sist.

Engelska Wikipedia: sökord ”Graham's Number”, en.wikipedia.org/grahams_number

En sida om andra sätt att skriva stora tal: www-users.cs.york.ac.uk/susan/cyc/b/big.htm