Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Proportionella resonemang

– Hur undervisar man om det?

Efter att betydelsen av proportionella resonemang har lyfts i fyra tidigare artiklar diskuterar författarna nu fem aspekter som enligt flera decenniers forskning är kritiska för undervisningen.

Det finns olika sätt att förhålla sig till matematikundervisning och målet med matematikundervisning. Vi tror att alla lärare enas i en önskan om att alla våra elever ska bli säkra på att lösa olika uppgifter och problem, men hur vi ska nå dit råder det delade meningar om. En strategi är att låta eleverna räkna 1000-tals uppgifter i läroböcker. Då finns chansen att eleverna redan har löst en i princip likadan uppgift när det kommer till skarpt läge med provräkningar och nationella prov. Förhoppningsvis minns eleverna vilka procedurer de använde och kan anlägga dessa utan justeringar till en ny lösning. Det handlar inte så mycket om att analysera situationen utan mer om att vara bekant med alla möjliga situationer som eleven kan tänkas behöva behärska i en provsituation. Det tror vi inte är det bästa sättet att lära elever något om matematik. Vi förespråkar istället en undervisningsstrategi som går ut på att eleverna ska identifiera vilken matematisk idé som är i spel i de situationer som de ställs inför. De ska till exempel med medvetenhet kunna avgöra om situationen är additiv, multiplikativ, exponentiell eller en blandning av dessa. På så sätt kan eleven känna säkerhet i sina lösningsstrategier i en mängd olika situationer och se att samma idéer dyker upp i olika matematiska områden. Samma idé i ny kontext.

Den mest genomsyrande matematiska idén i grundskolematematiken är proportionella resonemang. Vi har skrivit om proportionella resonemang och hur viktiga de är i fyra tidigare artiklar: *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar om vi hjälps åt? Varför är det så svårt att räkna ut hur mycket Börje har bantat? Varför är det så svårt att räkna ut den genomsnittliga hastigheten?* och *Förhållanden, sammansatta enheter och proportionella resonemang.* Man kan utan att överdriva säga att vi idogt har fört fram betydelsen av proportionella resonemang. I den här artikeln kommer vi att flytta fokus till vad som är viktigt att tänka på när man *undervisar* om proportionella resonemang.

Vi går rakt på sak. Det finns fem aspekter som är kritiska för om dina elever kommer bli bra på proportionella resonemang. Det här vet vi från omfattande forskning med samstämmiga resultat från 1980-talet fram till idag. Vi kallar dem *fem nycklar för att förstå proportionella resonemang.* Dessa är samtidigt lärarnycklar för att planera genomtänkta undervisningssekvenser om proportionella resonemang.

Nyckel 1: Lär eleverna att jämföra olika vardagssituationer och avgöra om de är additiva eller multiplikativa

Vad menas med det och vilka uppgifter är det egentligen som jag ska låta mina elever arbeta med? Vi illustrerar med några exempel. De första uppgifterna är lämpliga för mellanstadiet men om eleverna inte har arbetat med detta så är det hög tid på högstadiet. Jämför följande situationer och fundera på vad det är för skillnad.

> **Situation 1:** Sara och Johan springer lika fort runt en löparbana. Johan startade först. När Johan har sprungit 4 varv har Sara sprungit 2 varv. Hur långt har Sara sprungit när Johan har sprungit 8 varv?

> **Situation 2:** Petra och Tina lastar lådor i en lastbil. De startade samtidigt men Tina arbetar snabbare. När Petra har lastat 40 lådor har Tina lastat 160 lådor. Hur många lådor har Tina lastat när Petra har lastat 80 lådor?

Har du funderat klart? Här har vi två situationer som illustrerar två olika matematiska idéer. Situation 1 är additiv och situation 2 är multiplikativ. De elever som har lätt för matematik och kan läsa svenska har naturligtvis inga som helst problem med att lösa dessa beräkningsmässigt enkla uppgifter. Men väldigt många elever behöver undervisning som hjälper dem att uppmärksamma att det är skillnad på situationerna och att de därför kräver olika lösningsstrategier. Det är mycket vanligt att det didaktiska kontraktet kickar in och att eleven snabbt beräknar ett svar med hjälp av den metod som senast har varit på tapeten i undervisningen. Har eleverna adderat mest på sistone så använder de en additiv strategi och har de multiplicerat mest så använder de en multiplikativ strategi. Utan eftertanke. Det är inte alls konstigt, men om eleverna istället för att räkna ut uppgifterna får till uppgift att avgöra om situationerna är additiva eller multiplikativa (och senare även exponentiella) så kommer de att ha en vana av att först tänka efter. Det kan också vara bra att slänga in en och annan slamkrypare bland de situationer där eleverna ska identifiera vilken matematisk idé som är i spel. Situationer av den här typen gör att de måste vara extra uppmärksamma:

> Det didaktiska kontraktet handlar om elevernas och lärarnas roller i klassrummet. Ett konkret exempel kan beskrivas som att elevernas jobb är att snabbt och enkelt producera svar på uppgifter. Lärarens roll är att hjälpa till genom att säga hur eleven ska göra istället om beräkningen är fel.

> **Situation 3:** En stråkorkester med 15 musiker spelar en konsert på 2 timmar. Hur lång tid tar det för en stråkorkester med 30 musiker att spela samma konsert?

Bli inte förvånad om flera av dina elever föreslår att situationen är proportionellt multiplikativ och därför sträcks konserten ut till i konsertmått mätt fyra olidligt långa timmar. Alternativt kan de föreslå att med den ökade styrkan i omvänd proportionalitet kommer att riva av konserten på en timme. Poängen med uppgiften är att illustrera för eleverna att det finns situationer där den ena variabeln är oberoende av den andra.

Vi avslutar presentationen av nyckel 1 med ett konkret undervisningsförslag. Skriv ned olika situationer på spelkortsstora rektanglar på A4-papper. Kopiera, laminera och klipp isär. Låt eleverna arbeta i par med att identifiera den underliggande matematiska idén i situationen. De elever som är snabbt klara kan också beräkna svaren på uppgifterna i väntan på sina klasskamrater. Diskutera i helklass och var särskilt uppmärksam på elevernas feltänk. Det är, enligt vår erfarenhet, genom att känna felen som vi blir bättre på att identifiera vad som är det rätta.

Nyckel 2: Lär eleverna att identifiera den multiplikativa strukturen i proportionella situationer

Vad menas med det? Som vi har beskrivit i Nämnaren 2018:1 kan proportioner definieras antingen som en funktion eller som en likhet mellan två förhållanden:

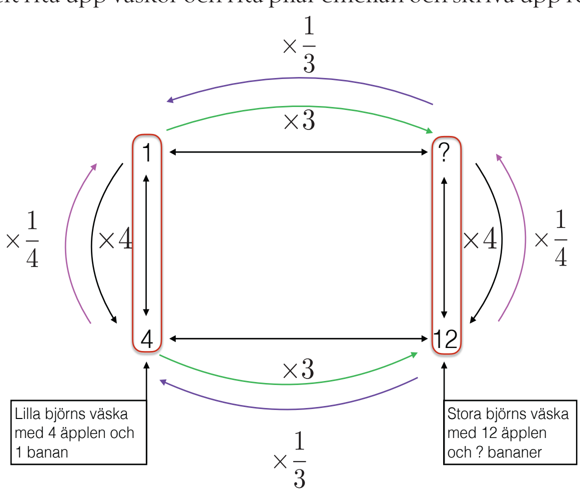
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Som en direkt följd av att vi har två förhållanden som kan skrivas på bråkform tillsammans med likhetstecknet som visar att den multiplikativa relationen mellan täljare och nämnare i både högerled och vänsterled är lika, kan vi enkelt identifiera en obekant då tre kvantiteter är givna.

Förhållandena kan också skrivas med notationen $a:b$ eller i en form där täljaren a förhåller sig till nämnaren b då den är 100, dvs det vi kallar enhet per hundradel eller procent rätt och slätt.

Vi tar ett exempel. Den här representationen beskriver en situation som vi använder i ett material för årskurs 2. Situationen är att Lilla björn och Stora björn ska ut på picknick. Barnen får veta att Stora björn alltid har 3 gånger så mycket mat som Lilla björn i sin ryggsäck. Via den informationen kan barnen identifiera alla relevanta multiplikativa relationer som finns mellan Lilla björns och Stora björns packning. Bilden nedan illustrerar att Lilla björn har 4 äpplen och Stora björn 12 äpplen. Nu är frågan hur många bananer Stora björn har om Lilla björn har 1 banan.

Genom att representera den proportionella situationen med en fyrkantsmodell kan barnen nå svaret genom att jämföra björnarnas packningar. Alla multiplikativa relationer som finns i den här situationen är beskrivna i bilden. Här får barnen tidigt bekanta sig med finessen med inversen. Om de vet hur många bananer Lilla björn har så kan de lätt multiplicera med 3 för att beräkna hur många bananer Stora björn har. Om de istället får veta hur många äpplen Stora björn har kan de beräkna hur många äpplen Lilla björn har genom att multiplicera med inversen till 3 som är 1/3, vilket också är samma sak som att utföra den inversa operationen till multiplikation, som är division. När man introducerar detta sätt att tänka kan man också operera med en tabellform eller helt enkelt rita upp väskor och rita pilar emellan och skriva upp relationerna.



Mängden situationer där proportionella resonemang är tillämpliga genomsyrar skolmatematiken och även fysikämnet. Det är därför värdefullt för elevernas utveckling att börja öva på att identifiera den multiplikativa strukturen i proportionella situationer tidigt i sin utbildning. Björnuppgiften är lämplig för elever i årskurs 2 och 3. När de kommer upp på mellanstadiet, högstadiet och gymnasiet finns det mängder av proportionella situationer där tre kvantiteter är givna och den fjärde saknas inom alla matematiska områden som behandlas.

Vi föreslår att du väljer ett par uppgifter av den här sorten från varje kapitel i den lärobok du använder. Använd så många lektioner som du behöver för att "undervisa på tvären" genom boken och visa att samma idé dyker upp överallt och att samma resonemang kan användas för alla proportionella situationer. Ofta är det nödvändigt att använda en *implicit etta* för att få till en fyrkantsmodell med tre kända och en okänd kvantitet. Med det menar vi att alla formler av karaktären

$$a = \frac{b}{c}$$

också kan skrivas som

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{c}$$

Om man tänker på det så finns det ingen ände på alla läroboksuppgifter som kan beskrivas som en proportion i betydelsen en likhet mellan två förhållanden.

Nyckel 3: Vänta med att introducera algoritmen korsvis multiplikation

Korsvis multiplikation innebär att eftersom

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

så är det alltid möjligt att multiplicera i kors när vi har en situation med en likhet mellan två förhållanden. Om situationen är proportionell och vi har att göra med en uppgift med ett saknat värde och tre kända kvantiteter så är det enkelt att korsmultiplicera för att isolera det obekanta värdet och beräkna det. Detta är en mycket effektiv algoritm. Dessvärre är det så att elever som får tillgång till algoritmen utan att ha de kunskaper som beskrivs i nyckel 1 och nyckel 2, överanvänder den utan eftertanke. För att förstå det här problemet kan vi betrakta situation 1, 2 och 3 under nyckel 1. En elev utan kunskap om hur man analyserar vilka matematiska idéer som är i spel i olika uppgifter kommer att använda korsvis multiplikation på alla tre situationerna – för att det är enkelt att göra det. För situation 1 ger korsvis multiplikation att

> Korsvis multiplikation kallas också reguladetri och du kan läsa mer om det på Wikipedia som har en utmärkt beskrivning: sv.wikipedia.org/wiki/Reguladetri.

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{X} \iff 4X = 2 \cdot 8 \iff X = 4$$

vilket är fel, eftersom situationen är additiv. För situation 2 ger korsvis multiplikation att

$$\frac{40}{160} = \frac{80}{X} \iff 40X = 160 \cdot 80 \iff X = 320$$

vilket är helt korrekt eftersom Tina är fyra gånger snabbare är den långsamma Petra.

För situation 3 ger korsvis multiplikation att

$$\frac{15}{2} = \frac{30}{X} \iff 15X = 2 \cdot 30 \iff X = 4$$

vilket är fel eftersom antalet musiker inte påverkar konsertens längd.

Låt oss tänka på nyckel 2 i relation till algoritmen korsvis multiplikation. Om eleverna har kunskaper som gör att de kan identifiera relationerna i en proportionalitet, som i exemplet med Stora björn och Lilla björn i nyckel 2, så kan de direkt se i Tina–Petra-situationen

$$\frac{40}{160} = \frac{80}{X}$$

att Tina är fyra gånger snabbare än Petra, eftersom 160 är 4 gånger mer än 40. Inga formelmanipulationer behövs alltså.

Det har alltså visat sig i forskning att elever som utrustas med algoritmen korsvis multiplikation innan de har tillräcklig övning på att identifiera multiplikativa relationer överanvänder algoritmen instrumentellt utan eftertanke. Så vänta med algoritmen tills du har hunnit undervisa om nyckel 1 och nyckel 2. När du sen introducerar den kan du använda de här exemplen för att visa dina elever att det är vanskligt att förlita sig blint på korsvis multiplikation. Det ger en extra stuns till klassrumsdiskussioner om dina elever räknar lite fel och korsmultiplicerar i fel situationer. De här felen kan verkligen hjälpa till att belysa skillnaden på olika situationer. Här kan du för ovanlighetens skull hålla tummarna för att någon eller några av dina elever överanvänder proportionalitetsargumentet och räknar fel för att få en bra grund för en produktiv klassrumsdiskussion.

Nyckel 4: Var tydlig med att visa att kunskap om och räkneregler för bråk också gäller för proportionella samband

Proportionella samband uttryckta som förhållanden följer samma räkneregler som alla uttryck skrivna på bråkform. Det är mycket praktiskt under förutsättning att man behärskar dem. Följande aritmetiska räkneregler för tal i bråkform är särskilt intressanta för proportionella resonemang:

- ett tal n kan skrivas på bråkform som $\frac{n}{1}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ om och endast om $ad = bc$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- ett tal $\frac{a}{b}$ har en multiplikativ invers som ges av $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
- $\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Den första räkneregeln beskriver den "implicita ettan" som vi nämnde under nyckel 2.

Vi rekommenderar att du arbetar mycket med de här generella algebraiska lagarna och ofta motiverar dem genom konkreta men generiska exempel, dvs exempel där bokstäverna är ersatta med tal valda så att komplexiteten i formen består. Enligt vår erfarenhet så gynnas faktiskt de svaga eleverna av att kunna lita på matematikens generaliserbarhet som kommer till uttryck genom att man formulerar formler och likheter på generell form med bokstäver. Samtidigt bör du så ofta som möjligt motivera dessa regler genom att visa hur de fungerar i enkla numeriska fall. När eleverna blir osäkra så kan de förlita sig på att matematiken fungerar, om de bara följer de generella reglerna även då marken gungar lite under fötterna. De vet att det finns generella regler och kan därför förankra dem i konkreta exempel. Vårt undervisningsförslag är alltså mer algebra i form av generella räkneregler som du ofta motiverar med generiska exempel och formella bevis. Om du nappar på vårt förslag från nyckel 2 så har du ett gyllene tillfälle att visa att det är samma algebraiska räkneregler som är i spel om och om igen. Det som förut framställdes som en uppsjö av olika saker: jämförelser, förlängning och förkortning av bråk, skala, likformighet, procent, hastigheter, kilopriser mm, linjära funktioner, likformig sannolikhet samt olika relationer av geometriska förhållanden är samma matematiska idé i olika kontexter. Matematiken krymper och blir tillgänglig för fler elever.

Med linjäritet menas att $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$.

I nyckel 4 ingår också att kunna skilja på om det är ett del : del-förhållande eller ett del : helhet-förhållande som representeras av situationen. För att undervisa om skillnaden kan du använda uppgifter med den sortens situation som vi beskrev i: *Varför är det så svårt att räkna ut hur lång tid det tar om vi hjälps år?* Intressanta del : del-förhållanden finns också i relationerna mellan ingredienserna i recept och i relationerna mellan sidorna i geometriska objekt. Vi har goda erfarenheter av att undervisa ”på tvären” genom de olika matematiska områdena. En lektionssekvens om olika del : del-förhållanden kan med fördel innehålla någon receptsituation, någon situation där två olika hastigheter är i spel samtidigt, som i den ovan nämnda artikeln, ett antal geometriska förhållanden och någon sannolikhetsfördelning. Vi tänker att elevernas kunskaper och erfarenheter får styra valet av uppgifter. Men det är också bra att välja förhållanden som eleverna förväntas använda långt senare i kurserna. Vi tar några exempel från geometrin. På lågstadiet kan eleverna muntligt ange enkla förhållanden mellan sidor i rektanglar som till exempel att den långa sidan är dubbelt så lång som den korta eller omvänt att den korta är hälften så lång som den långa. På mellanstadiet kan vi arbeta med förhållanden mellan sidor i en rätvinklig triangel och eleverna kan lätt ange förhållanden mellan sidor i en vanlig egyptisk triangel 3 : 4 : 5. Berätta gärna redan nu att dessa förhållanden har egna namn. Det krävs inget särskilt för att införa terminologin att förhållandet 3 : 4 kallas tangens, 3 : 5 sinus och 4 : 5 cosinus. Men när eleverna senare ska räkna med trigonometriska förhållanden kommer de ha fördelen att de är bekanta med begreppen.

Bråkbegreppets komplexitet har vi behandlat i *Ett sätt att tänka på progression av begreppskunskap* i Nämnaren 2018:3.

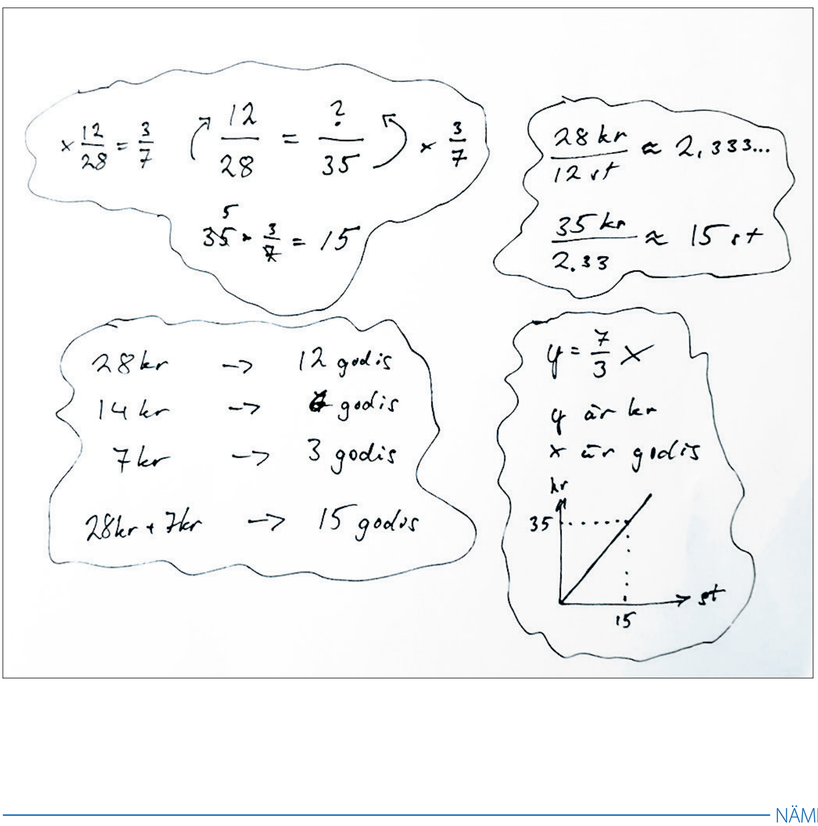
Nyckel 5: Använd en mängd olika representationer för att illustrera proportionella situationer

Den här nyckeln motiveras med hur vi ser på progression av begreppskunskap. Begrepp och progression i begreppskunskap har vi tidigare skrivit om i Nämnaren 2018:2 och 2018:3. Vi menar att progression i begreppskunskap är att över tid, med olika representationer, kunna hantera allt fler situationer där begreppen är tillämpliga. När det gäller proportioner så kan de uttryckas algebraiskt, aritmetiskt, geometriskt (då menar vi med bilder), i tabeller, i grafer, med ekvationer som beskriver funktioner och med verbala och skriftliga resonemang med eller utan matematiska symboler.

Vi föreslår att du låter eleverna presentera olika lösningar av samma uppgift för varandra på tavlan. Det här tar tid och du kanske bara hinner en uppgift på en lektion. Men om du vill undervisa för begreppsprogression är det enligt vår erfarenhet bättre att undervisa genom att vända och vrida på samma uppgift istället för att avverka många uppgifter med en ensidig användning av representationer och strategier. Vi tar ett exempel som kan användas från årskurs 2 och samtidigt fortfarande vara intressant i kurs 1 på gymnasiet på grund av de olika möjligheterna till representation och metodval.

> Susanne säger: Igår köpte jag 12 godisbitar för 28 kr. Idag ska jag köpa godisbitar för 35 kr. Hur många godisbitar kan jag köpa för 35 kr (samma godis, samma pris, i samma affär)?

I följande bild ser du lite olika sätt att representera och lösa uppgiften. Varianten nere i vänstra hörnet är en snygg intuitiv lösning som bygger på halva-dubbla. Det betyder att redan på lågstadiet är det möjligt att lösa uppgiften. De eleverna kan också få tillgång till plockmaterial som de kan omgruppera tills de når 15 godisar för 35 kr. Lösningen i övre vänstra hörnet används bara av elever som har fått undervisning om multiplikativa relationer i proportionella situationer. Övre högra lösningen använder principen 'vägen över ett' och den är vanlig hos elever som inte är bekväma med bråkformen. Den i nedre högra hörnet är en ren fabrikation. Ingen av våra elever har någonsin tecknat en funktion och ritat upp en graf. Om situationen är densamma i ditt klassrum så kan det bli ditt bidrag till diskussionen att låta eleverna använda grafritande verktyg för att rita upp funktionen, så att själva ritandet inte stjäl all tid. Här skapar du lätt ett fint tillfälle att diskutera riktningskoefficienten betydelse och funktion.



Vi föreslår att du alltid avslutar lektionen med att ge ett alternativt bidrag till elevernas olika lösningar och representationer. Om eleverna till exempel har använt komplicerade ekvationer kan du utmana dem genom att visa en enklare och mer intuitiv lösning. Omvänt så kan du visa en strikt lösning med matematiska symboler om eleverna har använt mer intuitiva lösningar. Den får gärna vara lite utom räckhåll för eleverna för stunden, så det vet vart de ska i framtiden.

Insikter och inspiration

Vi har nu presenterat olika aspekter av förståelsen av proportionella resonemang. Vi har sedan beskrivit hur den kunskapen kan användas som nycklar för att planera och genomföra undervisning om proportionella resonemang. Vi hoppas att du som har läst har fått nya insikter och inspiration som du kommer använda i din undervisning. Det är svårt att göra nya saker, men om du har frågor, funderingar eller synpunkter är du välkommen att kontakta oss, se Medverkandesidan.

LITTERATUR

Ahl, L. M. (2016). Research findings' impact on the representation of proportional reasoning in Swedish Mathematics textbooks. *REDIMAT*, 5(2), 180–204.

Shield, M. J, & Dole, S. (2013). Assessing the potential of mathematics textbooks to promote deep learning. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 183–199.

Shield, M. J., & Dole, S. (2008). Proportion in middle-school mathematics: It's everywhere. *The Australian Mathematics Teacher*, 64(3), 10–15.

Van Dooren, W., De Bock, D., Vleugels, K., & Verschaffel, L. (2010). Just answering … or thinking? Contrasting pupils' solutions and classifications of missing-value word problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 20–35.