Jöran Petersson

Potenser och logaritmer på tallinjen

Tallinjer har beskrivits i flera Nämnarenartiklar som ett didaktiskt redskap, bland annat som stöd för elever att visualisera talrader, som tankemodell vid subtraktion och i undervisningen av statistiska lägesmått. Tallinjen kan också användas för att illustrera potenslagar och logaritmer. Denna artikel beskriver en undervisningsmodell där de matematiska begreppen kommer i förgrunden och den vedertagna notationen hamnar i bakgrunden.

Ett frö till denna berättelse såddes när jag funderade på hur elever skulle få undervisning om potenslagar. I läroböckerna är det standard att presentera det som ett färdigt system för att beteckna upprepad multiplikation av tal eller bokstäver:

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^4$$

$$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 10^6$$

$$\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}^{n\text{ faktorer}} = a^n$$

Potenslagarna följer direkt ur skrivsättet, men en nackdel med den framställningen är att den inte uppmuntrar eleverna till att reflektera och utforska – allt är ju redan färdigt. Istället får de memorera fakta, vilket Roger Fermsjö påpekade i sin licentiatavhandling. Sådant lärande riskerar att bli sammanhangslöst, eller med andra ord, att det endast sker i en matematisk kontext isolerad från andra erfarenheter. Kunskaper förvärvade på detta sätt följer gärna Ebbinghaus glömskekurva och för att kompensera för det tar vi till överinlärning och eleverna får repetera länge och flitigt. För elever med fallenhet för matematik är detta urtråkigt. För övriga elever kan det möjligen vara ett acceptabelt tidsfördriv eller så riskerar det att ge matematiken en tråkstämpel av att upprepat glömma och repetera. Men vilka alternativ finns? Går det att göra arbetet med potenslagarna mer intressant genom att eleverna får använda andra representationsformer än tal och bokstäver och samtidigt behålla eller rentav förstärka precisionen och den matematiska idén? Vi gör ett försök där ledstjärnan är att matematik är en vetenskap byggd på *fantasi* och *associationsförmåga*.

Potenslagar

$$(x\cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$$
$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{m\cdot n}$$

Logaritmlagar

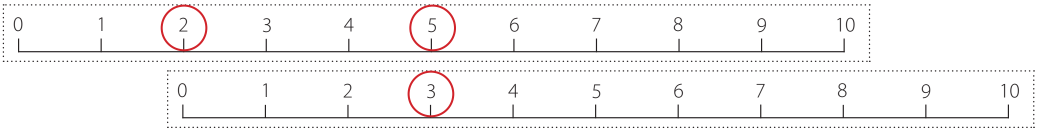
$$log_a(x) = log_a(b)\cdot log_b(x)$$
$$log\left(\frac{x}{y}\right) = log(x) - log(y)$$
$$log(x\cdot y) = log(x) + log(y)$$
$$log(x^n) = n\cdot log(x)$$

De nedersta kan sammanfattas i

$$log(x^m\cdot y^n) = m\cdot log(x) + n\cdot log(y)$$

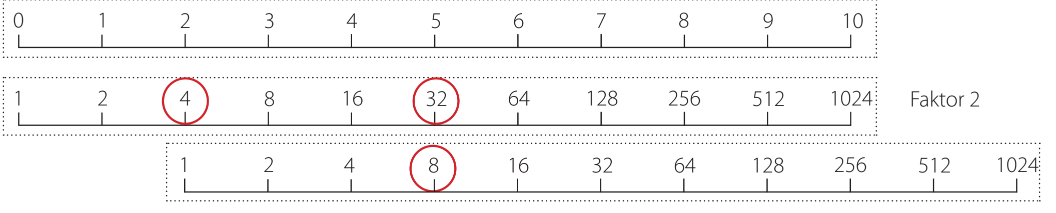
Potenslagar på pappersremsor

Vi börjar i det bekanta och använder två tallinjer på pappersremsor, som i figur 1, för att illustrera exempelvis additionen $2+3=5$. Detta motsvarar även subtraktionen $5-3=2$. Vi har ”uppfunnit” en enkel form av ”miniräknare” för addition och subtraktion.



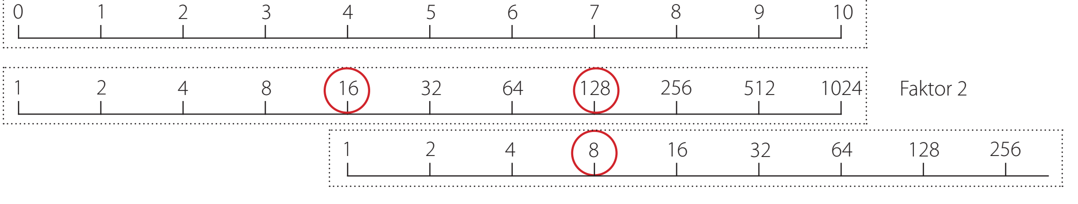
Figur 1. Två tallinjer för att illustrera addition och subtraktion.

I figur 1 adderar vi samma tal, 1, för varje nytt skalstreck. Vi använder nu *matematisk fantasi* och istället för att addera med samma tal för varje nytt skalstreck så multiplicerar vi. Enklast är faktorn 2, dvs att dubblera, som i figur 2 och att starta tallinjen på talet 1 eftersom alternativet att börja på noll och dubblera inte är intressant. För att räkna antalet dubbleringar, lägger vi en tredje, vanlig tallinje ovanför.



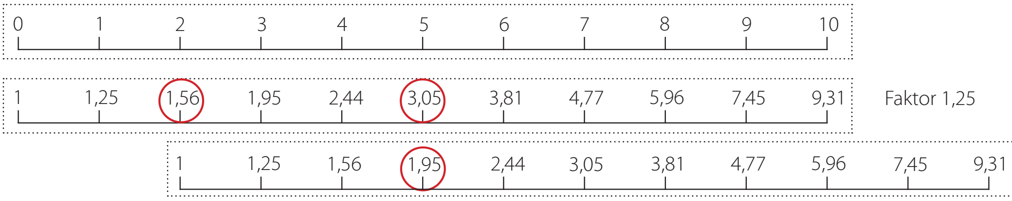
Figur 2. Tallinjer för att illustrera multiplikation och division.

Vi kan se att ringarna nu pekar ut ett samband mellan talen 4, 8 och 32 och vi känner igen det som produkten $4 \cdot 8 = 32$ men också som divisionen $32/8 = 4$. Fungerar detta även för andra talkombinationer på tallinjen? I så fall har vi även en enkel form av miniräknare för multiplikation och division. Vi provar och flyttar den nedre pappersremsan så det syns att vi startar från 16.



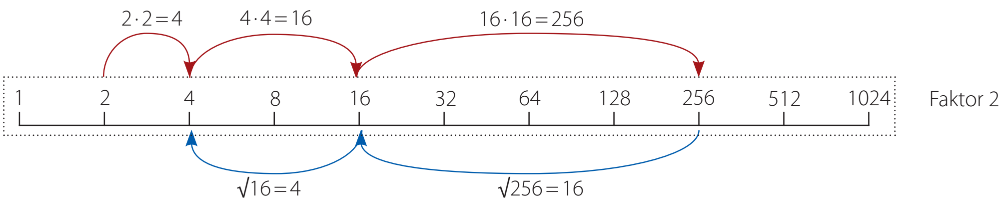
Figur 3. Illustration av exemplet $16 \cdot 8 = 128$.

Sambanden mellan talen 16, 8 och 128 känner vi också igen: $16 \cdot 8 = 128$ och $128/8 = 16$. Var dessa resultat tillfälligheter? Prova gärna själv med några andra faktorer. När vi ser att det fungerar för heltal är det dags att se om det fungerar för decimala faktorer och vi provar med faktorn 1,25.



Figur 4. Faktorn 1,25. Observera att produkterna har avrundats till två decimaler.

Vi kan konstatera att det fungerar även med decimala produkter. Exempelvis kan vi i figur 4 avläsa att $1,56 \cdot 1,95 \approx 3,05$. Använd nu *matematisk associationsförmåga*. En vanlig linjal har skalstreck för mindre enheter: mellan centimetrarna finns det millimeterstreck. Finns det tal mellan två skalstreck på pappersremsorna – och i så fall vilka? Låt oss undersöka. Återvänder vi till figur 2 kan vi notera att kvadraten av ett tal (x^2) innebär att gå dubbelt så många steg framåt (röda pilar i figur 5) och roten ur ett tal ($\sqrt{x}$) motsvarar att gå halvvägs mot ettan (blå pilar i figur 5).



Figur 5. Illustration av x^2 och $\sqrt{x}$.

I så fall är $\sqrt{32}$ ett tal mellan 4 och 8. Vi provar även i figur 4 och finner att $\sqrt{3,05}$, och därför även $\sqrt{3}$, bör vara ett tal mellan 1,56 och 1,95. Vi kan bekräfta roturdragningarna med en miniräknare: $\sqrt{32} \approx 5,66$, $\sqrt{3,05} \approx 1,75$ och $\sqrt{3} \approx 1,73$. Våra pappersremsor fungerar alltså även för att ungefärligt bestämma kvadratroten ur tal. När vi nu ser att operationen dividera antalet steg med 2 motsvarar kvadratrötter, kan vi använda *matematisk fantasi* och undra vad som händer om vi dividerar antalet steg med 3 – eller någon annan faktor. En idé värd att prova.

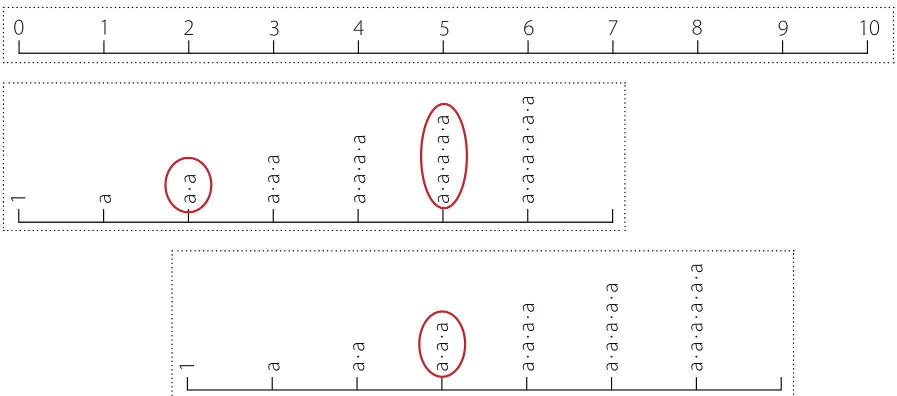
Vid steg 6 i figur 4 står det 3,81 och en tredjedel av 6 är 2. I figur 4 vid steg 2 står det 1,56 och vi kan kontrollera med miniräknaren att $1,56^3 \approx 3,80$. Den här 'tredjedelsroten' har i den etablerade matematiken fått namnen 'tredje roten ur', 'kubikrot' och 'upphöjt till en tredjedel'. Tallinjen fungerar alltså som stöd för att upptäcka bråktalsexponenter och att se likheten mellan beteckningarna $\sqrt{a} = a^{½}$ och $\sqrt[n]{a} = a^{(1/n)}$. Eftersom det uppenbarligen fungerar med tredjedelar i exponenten så blir, med lite *matematisk fantasi*, en möjlig följdfråga: vad händer om vi avläser vid 2/3 mellan ettan och sjätte steget, dvs vid fjärde steget i figur 4? Där står talet 2,44. Vi kan konstatera att miniräknaren ger samma svar, nämligen att $3,81^{2/3} \approx 2,44$. Vi kan alltså använda vår pappersremsa för att konstatera att $4^{2/3}$ måste vara lite drygt 2,44.

Fler skalfaktorer

Vi gör ytterligare ett experiment. Vi lägger två tallinjer med faktorn 2 respektive 4 jämte varandra och ser att vi får gå dubbelt så många steg på den med faktorn 2 för att komma till samma tal som på den med faktorn 4. Det kanske inte förvånar någon eftersom det är en kvot 2 mellan faktorerna 2 och 4. För att skapa kontrast jämför vi därför även två tallinjer med faktorerna 3 och 9. Även här får man gå dubbelt så många steg på tallinjen med skalfaktorn 3. Vi kan också jämföra tallinjerna med skalfaktorerna 1,25 och 2. För att komma till talet 1,95 ≈ 2 går vi 3 steg med skalfaktorn 1,25 men förstås bara 1 steg med skalfaktorn 2. Motsvarande förhållande gäller när vi går till talet 3,81 ≈ 4. Det behövs alltså en kvot 3 mellan antalet steg på dessa två tallinjer. Vår slutsats blir att antalet steg för att komma till ett visst tal på en tallinje är proportionellt mot antalet steg på en annan tallinje. Detta är första logaritmlagen i den blå rutan.

Faktorn a

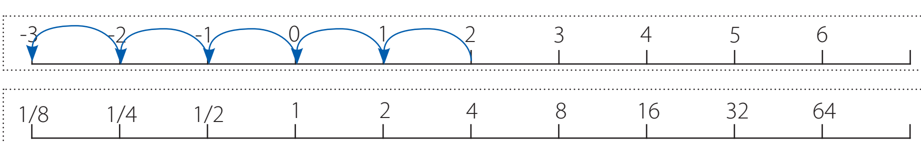
Nu är det dags att fundera på *varför* våra pappersremsor fungerar som multiplikationstabell och vi har praktisk nytta av algebran eftersom faktorn a i figur 6 kan vara vilket positivt tal som helst. Figuren visar vad som redan gått att ana: att först multiplicera 2 gånger med en faktor och sedan multiplicera ytterligare 3 gånger är detsamma som att multiplicera 2 + 3 = 5 gånger med faktorn. Med traditionell notation motsvarar det potenslagen $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$.



Figur 6. Faktorn a.

Även potenslagen för $(a^n)^m$ framgår på motsvarande sätt. Nämligen att multiplicera potensen a^n med sig själv m gånger betyder att vi får m gånger n faktorer av a. Potenslagen $a^n/a^m = a^{(n-m)}$ för division blir uppenbar på motsvarande sätt. Nämligen att vi förkortar a^n med a^m, vilket vi ofta illustrerar med att ta bort m faktorer av talet a från potensen a^n. Eftertänksamma elever brukar ställa frågor av typen ”Vad händer om vi tar bort mer än det finns från början?”. Det leder oss till nästa *matematiska association* och den kan komma antingen från aritmetiken eller från geometrin. Om vi börjar med aritmetiken kan vi ställa oss följande fråga: Hur ser det ut, om vi på vår tallinje med faktorn 2 börjar med talet 4 och dividerar det 5 gånger med talet 2? Dvs 4/2 = 2; 2/2 = 1; 1/2 = $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ /2 = 1/4; $\frac{1}{4}$ /2 = 1/8.

Med början i en geometrisk association hade vi istället kunnat ställa oss följande fråga: En vanlig tallinje kan vi utsträcka till negativa koordinater. Kan vi göra det även här? Hur kan vi exempelvis komma till talet (-3)? I figur 7 ser vi att det aritmetiskt motsvarar ett antal divisioner med talet 2.



Figur 7. Antalet divisioner med talet 2.

Hur förklarar vi resultatet av experimentet med flera skalfaktorer? Jo, det svarar mot att exempelvis $9^1 = 3^2$ och att $1{,}25^3 \approx 2$. Dvs $a^m = b^n$ ger att m steg på ena tallinjen motsvarar n steg på den andra tallinjen. Därmed har vi med hjälp av potenser på tallinjer visat att det finns ett proportionellt samband på samma form som den första logaritmlagen i den blå rutan.

Logaritmer längs en tallinje

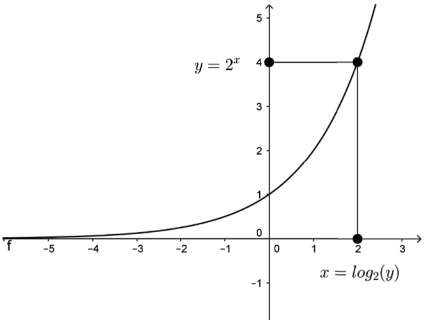
Vi återvänder till figur 2 igen. Denna gång ska vi göra som Roger Fermsjö gjorde i sin licentiatavhandling för att undervisa om logaritmer med början i 2-logaritmen. Av ren lathet kan det vara smidigt att säga "gå 3 steg åt höger från 2 till 5 på den översta tallinjen" istället för att "multiplicera 4 med 2 tre gånger och hamna på 32". Sådan mental lathet är viktig för matematikens utveckling. Det är nämligen bränsle till *matematisk fantasi*. Att räkna antalet steg istället för talet självt är särskilt smidigt om talen är otympligt stora som jordens massa i kg eller otympligt små som elektronens massa i kg. Just antalet steg längs referenstallinjerna i figurerna 2, 3, 4 och 6 kallar matematikerna för logaritm.

Ur figur 2 kan vi därför avläsa att logaritmen (närmare bestämt 2-logaritmen eftersom basen är talet 2 i motsvarande potens) för 4 är 2 eftersom talet 4 är två steg från ettan. På motsvarande sätt gäller att 2-logaritmen för 8 är 3 och logaritmen för $(4 \cdot 8)$ finner vi $2+3=5$ steg från ettan. Eftersom logaritmer på våra tallinjer motsvarar hur många gånger man har multiplicerat med den valda faktorn, så gäller följande: Om ett tal A finns a steg från ettan (alltså a stycken multiplikationer av faktorn) och ett annat tal B finns b steg från ettan, så finns produkten AB på $a+b$ steg från ettan.

Motsvarande gäller vid division och det är logaritmlagarna, som vi alltså kan få genom att räkna antalet steg på referenstallinjen.

Vilka förkunskaper behövs?

Vi kan analysera vilka förkunskaper som olika framställningar kräver för att ge förståelse för potenser och logaritmer. Framställningen i figur 2 visar att det i sin enklaste form räcker med kunskaper i heltalsaritmetik i talområdet 1–100 och om tallinjen, vilket är mål i grundskolans årskurs 3. Vi kan jämföra detta med en annan vanlig metod för att introducera logaritmer, nämligen som invers funktion till potenser. Men invers kräver kunskaper om begreppet funktion, vilket i sin tur kräver kunskaper om den algebraiska notationen $y=f(x)$ samt om koordinatsystem med två axlar. Detta sammantaget får vi nog betrakta som gymnasiekunskaper. En intressant slutsats är att vi genom att välja lämplig representationsform, drastiskt kan ändra förkunskapskraven. Med en metafor kan vi säga att trösklarna till begreppet logaritm har sänkts.



Figur 8. Logaritm beskriven som invers till en funktion.

Experimentet med att jämföra olika tallinjer motsvarar den första logaritmlagen $log_a(x) = log_a(b) \cdot log_b(x)$, vilken är en komplicerad blandning av index, obekanta parametrar och logaritmer i opreciserade baser. Det är lätt att "inte se skogen för alla träden" och det är synd då denna formel är betydligt mer fantastisk än vad det första intrycket möjligen kan inge, nämligen att alla exponentiella kurvor $y = C e^{bx}$ blir räta linjer med lutning $b \cdot log(e)$ oavsett vilken logaritmisk skala vi använder på y-axeln. Dessutom, även om en algebraisk härledning av denna logaritmlag är okomplicerad, så känns den lite bakvänd. Nämligen, använd både begreppet potens och begreppet logaritm samtidigt genom att skriva om x på följande sätt: $x = b^{\log_b(x)}$. Vi kan nu härleda den första logaritmlagen genom att ta a-logaritmen på denna likhet så att $log_a(VL) = log_a(HL)$. Med hjälp av den andra logaritmlagen faller nu den första logaritmlagen ut. Detta algebraiska sätt att härleda den första logaritmlagen kräver ganska goda förkunskaper om logaritmers egenskaper och inverser. En minnesregel för att komma ihåg utseendet är att skriva $\ln(x) = k \cdot \lg(x)$ för att sedan ta reda på k genom att stoppa in exempelvis $x = 10$. När vi jämför de båda framställningarna av den första logaritmlagen, ser vi att framställningen på tallinjen passar bra som introduktion och utforskande laboration som kräver betydligt mindre av såväl abstraktionsnivå som förkunskap om egenskaper hos logaritmer och potenser än den algebraiska härledningen, som passar bättre när eleverna har fått god hand med logaritmer och potenser.

Vi summerar

Vi kan kategorisera de genomgångna framställningarna i olika representationsformer. Framställningen i

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ faktorer}} = a^n$$

använder algebra (alternativt tal) som representationsform medan framställningen i figur 2 använder tal och geometri och framställningen i figur 8 använder grafer.

Ofta brukar grafisk framställning vara enklare än tal och algebra, men här är det mer komplicerat än så. Just för logaritmer gäller att den numerisk-geometriska framställningen i figur 2 kräver mindre av förkunskaper i matematik än den grafiska framställningen i figur 8, vilken bygger på inversa funktioner. Även när vi jämför den numerisk-geometriska framställningen i figur 2 med en enbart numerisk eller enbart algebraisk variant av ekvationen ovan, finns det fler associationsmöjligheter i figur 2, nämligen med den sedan tidiga skolår välbekanta tallinjen där vi med den som språngbräda kan associera till såväl bråktalsexponenter som negativa exponenter. När vi väljer en framställning har vi alltså flera saker att beakta.

- Vilka förkunskaper kräver framställningen?
- Vilka representationsformer ingår i framställningen?
- Är en viss framställning mer användbar (generaliserbar) för den fortsatta undervisningen än en annan framställning?

Ytterligare en aspekt är att framställningen i figur 2 ligger närmre den historiska uppkomsten av begreppet logaritmer. Här finns alltså även möjligheten att koppla till matematikhistoria.

LITTERATUR

Dahl, H. H. & Nohr, M. E. (2010). *Perlesnor og tom tallinje.* Nämnaren 2010:4.
Fermsjö, R. (2014). *Rekonstruktion av logaritmer med tallinjer som medierade redskap.* Licentiatavhandling. Stockholms universitet.
Holmberg, B. & Kilhamn, C. (2014). *Subtraktion på den tomma tallinjen.* Nämnaren 2014:3.
Kilhamn, C. (2014). *Tallinjen som ett didaktiskt redskap.* Nämnaren 2014:2.