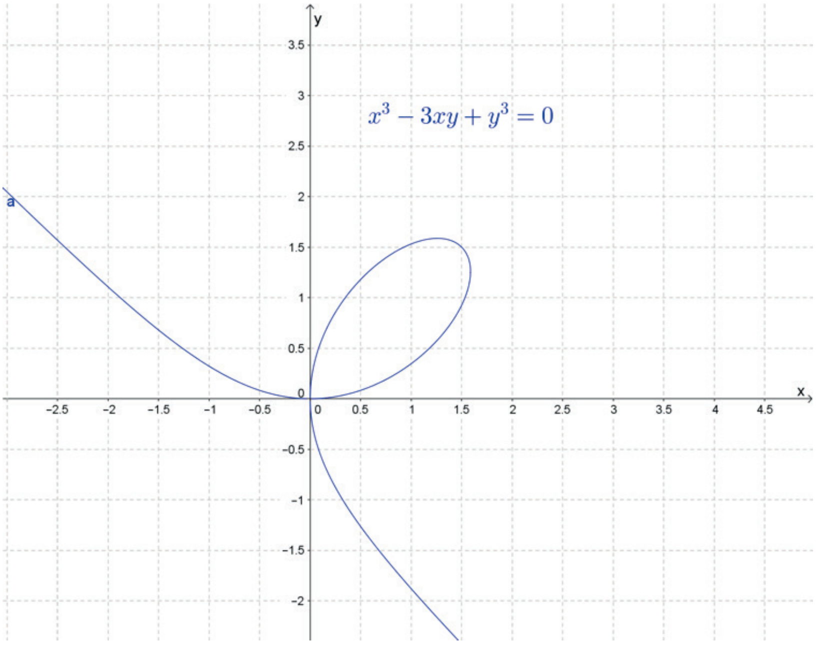
Güner Ahmet & Thomas Lingefjärd

Parametriska kurvor

Geogebra är ett så kallad dynamiskt geometriprogram och uppfattas kanske som ett program för främst geometri. Men Geogebra kan användas för alla delområden inom matematik.

Det är lätt att hitta datorprogram som ritar kurvor av enkla funktionsuttryck, som deriverar och integrerar, samt kan lösa och rita flödeskurvor till ordinära differentialekvationer. Men det är ganska svårt att hitta datorprogram som kan rita kurvor till relationsuttryck av typen $x^3 + y^3 = 3xy$. Det innebär att Geogebra kan användas till att undersöka även relationer mellan x och y på olika sätt. Alla program klarar inte av att representera $x^3 + y^3 = 3xy$ grafiskt, åtminstone inte i kartesiska koordinater. Du hittar en dynamisk version och Geogebra-filen på www.geogebra.org/m/v6ymCEpp.



Geogebra representerar $x^3 + y^3 = 3xy$ i ett kartesiskt koordinatsystem.

Det här problemet kan vi emellertid komma runt genom att undersöka kurvor definierad i så kallad parametrisk form. I matematikspecialiseringen i gymnasiet läser man om räta linjens ekvation i parameterform. Under Ämnets syfte i matematik står det att *undervisningen i ämnet matematik ska syfta till* *att eleverna utvecklar kunskaper om matematiska begrepp och metoder samt förmåga att använda dessa … Undervisningen ska också leda till att eleverna utvecklar förmåga att använda digital teknik och andra redskap som kan användas för att lösa matematiska problem.*

Vi ska visa hur man kan använda datorn som digitalt hjälpmedel vid beskrivning av parametriska kurvor. En parametrisk kurva i planet består av ett par av funktioner:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

där de två funktionerna definierar ordnade par av (x, y). Dessa två ekvationer kallas för parameterframställning av en kurva, eller för kurvans definition på parameterform. Kurvans utsträckning beror på hur t är definierad och i allmänhet måste vi definiera t för att kunna rita en kurva på parameterform. I många tillämpningar så kan vi tänka oss att x och y "varierar med tiden t" eller att t beskriver en rotationsvinkel som en kurva rör sig utefter.

Det är ofta fördelaktigt att ta en relativt komplicerad ekvation som beskriver ett samband i rektangulära koordinater och skriva om denna i parametrisk form. En cirkel med radie r och medelpunkt (x_0, y_0) har ekvationen $x = x_0 + r \cdot \cos t$, $y = y_0 + r \cdot \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Hela cirkeln kan inte beskrivas med en ekvation av formen $y = f(x)$ eftersom två olika y-värden hör till varje x då x tillhör det öppna intervallet $(x_0 - r, x_0 + r)$. Däremot kan exempelvis den övre halvcirkeln beskrivas av en sådan ekvation. Exempel:

Bestäm den parametriska ekvationen för cirkeln $x^2 + y^2 = 5$.

Lösning: Den givna cirkeln är $x^2 + y^2 = 5$. Vi vet att parameterframställningen av cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ är $x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$.

Vi identifierar att $r = \sqrt{5}$. Det ger att parameterframställningen av $x^2 + y^2 = 5$ är $x = \sqrt{5} \cdot \cos \Theta$, $y = \sqrt{5} \cdot \sin \Theta$, $0 \leq \Theta \leq 2\pi$.

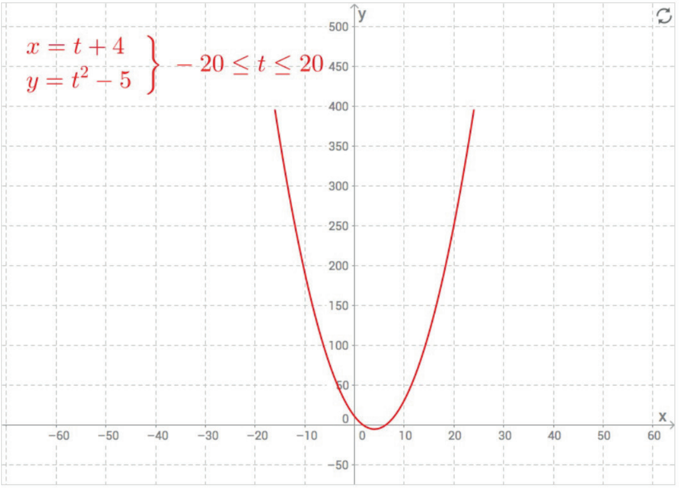
Ekvationen $y = 3x - 2$ beskriver en rät linje i ett kartesiskt koordinatsystem. Men hur ser denna linje ut i parameterform?

Lösning: Om vi inför en parameter, exempelvis t, och låter x och y vara funktioner av denna, kan vi skriva linjen ovan på följande sätt: $x = t$, $y = 3t - 2$, $-\infty < t < \infty$. I Geogebra kan vi grafiskt representera denna linje med hjälp av kommandot **Kurva[<Uttryck>, <Uttryck>, <Parameter>, <Från>, <Till>]**. Observera att när vi skriver intervallet för t i ovanstående kommando så kan vi inte välja att t ska variera mellan $-\infty < t < \infty$, då Geogebra räknar $-\infty \leq t \leq \infty$. Vi låter nu Geogebra konstruera en kurva där alla punkter ligger på en parabel:

$$x = t + 4$$

$$y = t^2 - 5$$

Vi ger följande kommando i inmatningsfältet: **Kurva[*t* + 4, *t*² – 5, *t*, –20, 20]** och Geogebra levererar därigenom följande graf. Observera att vi på detta sätt får kontroll över hur stort värdemängds- och definitionsområdet blir. Du hittar en dynamisk version och Geogebra-filen på www.geogebra.org/m/nWWd2c8A.



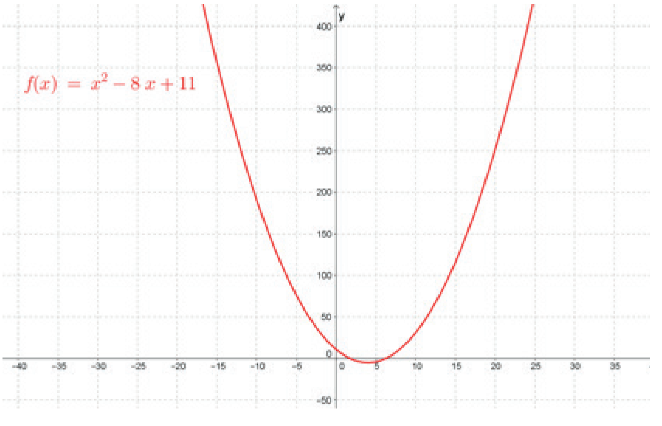
Geogebra representerar en parametrisk kurva.

Genom att eliminera *t* från

$$x = t + 4$$

$$y = t^2 - 5$$

får vi kurvan $y = x^2 - 8x + 11$. Den kan vi rita i ett kartesiskt koordinatsystem genom att bara skriva kurvan i inmatningsfältet hos Geogebra. Nu ser vi skillnaden mellan parameterform och kartesisk form. I den form som vi nu definierade kurvan i får vi mängden av alla punkter på kurvan.



Geogebra ritar lätt upp kurvor i kartesiska koordinater.

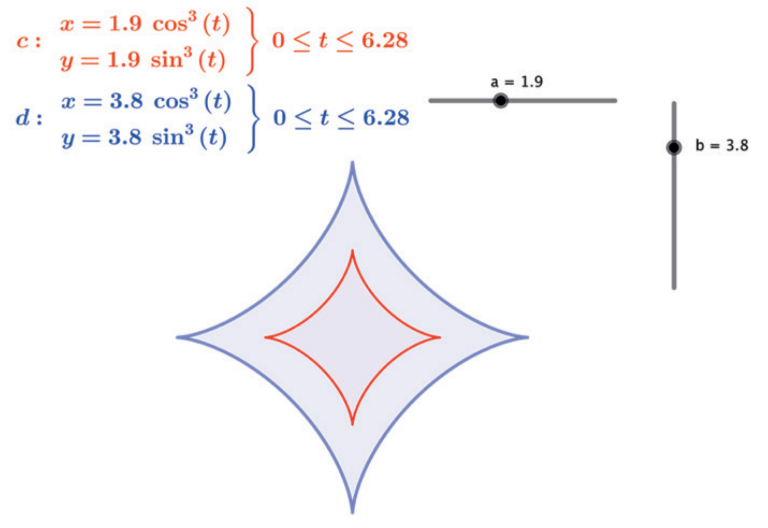
Vi vill nu visa några mer eller mindre kända kurvor som enkelt kan uttryckas med hjälp av parameterframställning. Genom att sätta på animering av en eller flera parametrar kan vi också få dessa figurer att pulsera.

Asteroid

Vi skapar två glidare ***a*** och ***b***. Vi låter ***a*** variera mellan 0 och 5 med steg 0,05 och ***b*** att variera mellan 0 och 5 med steg 0,05. Vi skriver i inmatningsfältet **Kurva[*a* cos³ (*t*), *a* sin³ (*t*), *t*, 0, 2π]**. Geogebra levererar den första asteroiden.

Vi skriver en gång till i inmatningsfältet **Kurva[*b* cos³ (*t*), *b* sin³ (*t*), *t*, 0, 2π]**. Då levererar Geogebra den andra asteroiden.

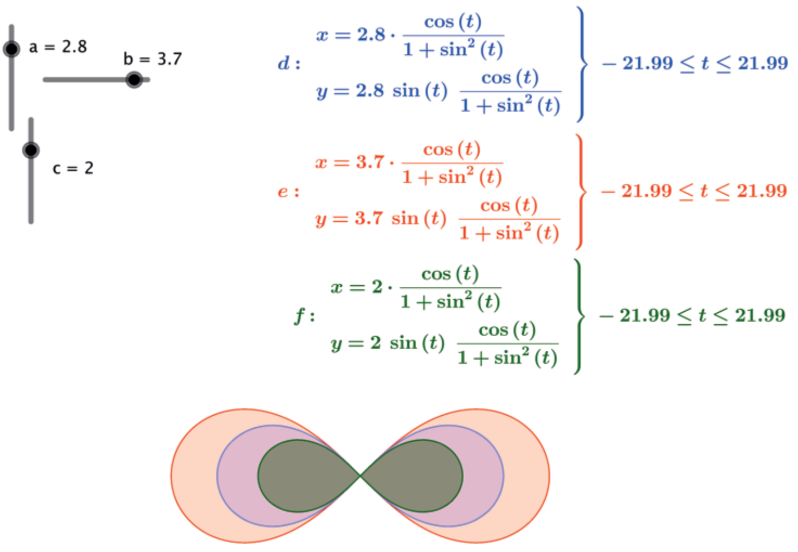
Vi sätter glidare ***a*** på sitt maximumvärde och glidare ***b*** på sitt minimumvärde. I nästa steg markerar vi dessa två glidare i algebrafönstret och väljer **animering på**. Då får vi två pulserande asteroider som även kan färgläggas. Du hittar en dynamisk version och Geogebra-filen på www.geogebra.org/m/wX5TFwGd.



En pulserande asteroid skapad i Geogebra.

Bernoullis Lemniskata

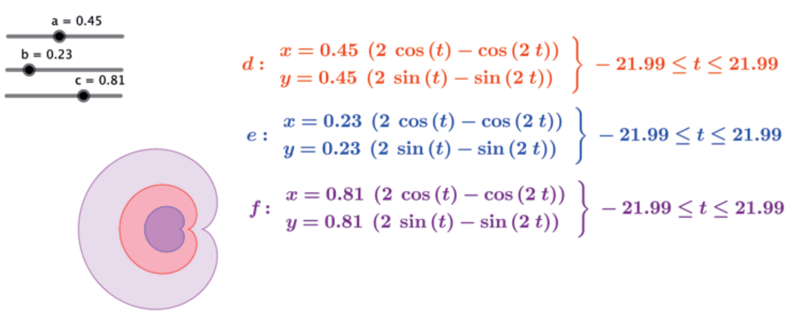
Även en annan känd figur går att visa med hjälp av parametrisering i Geogebra, nämligen Bernoullis Lemniskata. Vi skapar tre glidare ***a***, ***b*** och ***c*** med minimumvärde -5 och maximumvärde 5 med steg 0,1. Vi skriver i inmatningsfältet **Kurva[*a* cos(*t*)/(1 + sin²(*t*)), *a* sin(*t*) cos(*t*)/(1 + sin²(*t*)), *t*, -7π, 7π]** och samma kommandon två gånger till genom att byta ***a*** till ***b*** och ***c***. Geogebra levererar tre kända kurvor. Vi färglägger dem. Vi väljer ***a*** = 3, ***b*** = 2 och ***c*** = 1, markerar dessa i algebrafönstret och väljer **animering på**. Då får vi tre pulserande Bernoullis Lemniskata-kurvor. Du hittar en dynamisk version och Geogebra-filen på www.geogebra.org/m/WSSBw9QQ.



Bernoullis Lemniskata.

Tre pulserande kardioider

Vi vill även passa på och visa hur vi skapar tre pulserande kardioider i Geogebra. Vi börjar med att skapa tre glidare ***a***, ***b*** och ***c*** med minimumvärde 0 och maximumvärde 1,2 med steg 0,01. Vi skriver därefter in följande kommando i inmatningsfältet: **Kurva[*a* (2 cos(*t*) – cos(2*t*)), *a* (2 sin(*t*) – sin(2*t*)), *t*, -7π, 7π]** och samma kommandon två gånger till genom att byta *a* till *b* och *c*. Då får vi tre kardioider som vi färglägger och väljer ***a*** = 0, ***b*** = 0,6 och ***c*** = 1,2, markerar dessa i algebrafönstret och väljer **animering på** med animeringshastighet **2**. Då får vi tre pulserande kardioider. Du hittar en dynamisk version och Geogebra-filen på www.geogebra.org/m/sQdm8K4z.



En pulserande kardioid.

Ett pulserande hjärta

Vi hoppas att du nu har fått en liten inblick i hur vackra representationer vi kan skapa på detta sätt och vi avslutar med att visa hur vi kan avbilda en klassisk hjärtform med Geogebra. Att representera ett pulserande hjärta i kartesiska koordinater är inte helt enkelt. Vi konstruerar istället kurvan i parametrisk form genom att börja med att skapa två glidare: glidare ***i*** som varierar mellan -2 och 2 med steg 0,01 och glidare ***n*** som varierar mellan 0 och 2π med steg 0,01. Vi skriver i inmatningsfältet **Kurva[*i* 16 sin³(*t*), *i* (13 cos(*t*) – 5 cos(2*t*) – 2 cos(3*t*) – cos(4*t*)), *t*, 0, n]**. Vi sätter glidare ***n*** på maximumvärdet och sedan väljer vi animering på glidare ***i***. Geogebra levererar därigenom ett pulserande hjärta. Du hittar en dynamisk version och Geogebrafilen på www.geogebra.org/m/Zg4k8Wut.

i = 1.7

$$a: \left.\begin{array}{l} x = 1.7 \cdot 16 \sin^3(t) \\ y = 1.7\ (13 \cos(t) - 5 \cos(2t) - 2 \cos(3t) - \cos(4t)) \end{array}\right\} 0 \le t \le 6.28$$