Thomas Lingefjärd, Güner Ahmet & Djamshid Farahani

Att undervisa om gränsvärden med Geogebra

I denna artikel presenteras två typer av gränsvärden som gymnasieelever möter i de senare kurserna. Gränsvärdena kan visualiseras genom grafisk eller geometrisk representation i Geogebra.

Elever bekantar sig med begreppet gräns i tidig skolålder. Gränser mellan länder eller tomter diskuteras säkert i både hem och skola. Begreppet gränsvärde brukar kanske först komma genom miljömässiga diskussioner i förhållande till vad människor och natur tål av t ex bekämpningsmedel.

Elever lär sig tidigt att de naturliga talen 1, 2, 3, 4, 5, 6, … inte har någon övre gräns. Det innebär att elever redan då har en viss uppfattning om begreppet oändlighet utifrån ett matematiskt perspektiv. När det gäller matematiskt definierade gränsvärden är dessa ofta definierade relativt ett tal eller en sekvens som går mot oändligheten. Så elever behöver på något sätt ha mött begreppet oändlighet innan lärare börjar diskutera matematiska gränsvärden, till exempel att en stråle går mot oändligheten i sin ena riktning medan en linje sträcker sig mot oändligheten i båda riktningarna. Elever lär sig begränsa en linje till en sträcka. Senare lär sig elever att även en funktion kan ha ett gränsvärde när x går mot oändligheten.

Begreppet gränsvärde introduceras i Ma3. I samma kurs definieras derivatan av en funktion med hjälp av gränsvärde. Senare i Matematik Specialisering används gränsvärde för att bestämma asymptoter till en funktion. I centralt innehåll under rubriken *Samband och förändring* för kurs Ma3 står bland annat:

- Orientering när det gäller kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
- Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
- Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.

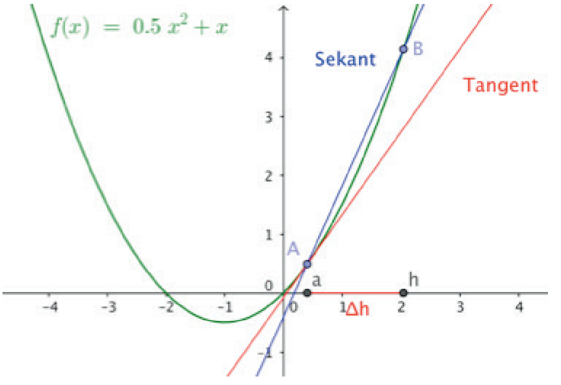
Definition av gränsvärde

Vi definierar begreppet gränsvärde genom att välja ett funktionsutryck $f(x)$ till exempel av andra graden och teckna ändringskvoten som beskriver lutningen för en sekant genom punkterna $(a, f(a))$ och $((a + \Delta h), f(a + \Delta h))$

$$\frac{f(a+\Delta h)-f(a)}{(a+\Delta h)-a}=\frac{f(a+\Delta h)-f(a)}{\Delta h}$$

Om Δh blir mindre och mindre kommer sekantens lutning att närma sig tangentens lutning, se figur 1. När Δh går mot noll kommer sekanten till slut att övergå till tangenten i punkten $(a, f(a))$. Detta gränsvärde av ändringskvoten är derivatan av $f(x)$ i punkten a. Vi skriver det på följande sätt:

$$f'(x) = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{\Delta h}$$



Figur 1. En sekant övergår till en tangent.

Du hittar konstruktionen på: https://www.geogebra.org/m/w6fxjTnF.

I kursen beräknar elever gränsvärde av olika enkla funktionsuttryck, som mest av grad fyra. Alla dessa uppgifter handlar om att elever ska beräkna gränsvärden när Δh går mot noll. Men elever möter begreppet gränsvärde även i Ma 4.

Ett delkapitel i Ma 4 handlar om derivata och gränsvärde, asymptoter och kurvritning, och integraler. Här brukar enkla exempel visa hur vi kan beräkna vänstergränsvärde och högergränsvärde. I kursens innehåll är en kontinuerlig funktion definierad på följande sätt:

> *En funktion f(x) är kontinuerlig i en punkt a om* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. *Vi säger att funktionen är kontinuerlig i ett givet intervall om f(x) är kontinuerlig i varje punkt i intervallet.*

Elever löser uppgifter av typen: $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{sin x}{x}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{x}$.

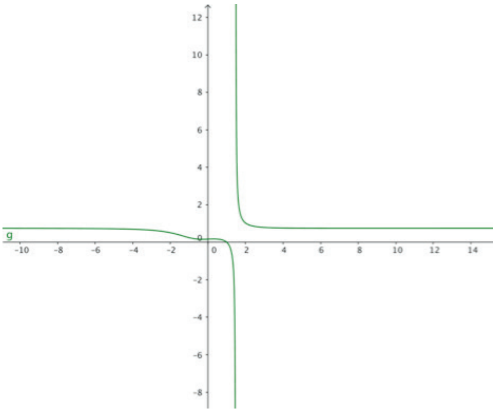
I det nationella provet för Ma 3c hösten 2012 finns det endast två uppgifter med gränsvärden som elever ska bestämma. Dessa uppgifter är:

$$\lim_{x \to 0}(e^x + 7) \text{ och } \lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{16x}{4x+9}}.$$

Båda dessa gränsvärden är möjliga att beräkna med huvudräkning för den som vet att $e^0 = 1$ och i det andra exemplet är förtrogen med algebra. I denna artikel ska vi visa hur Geogebra kan hjälpa oss att visualisera och beräkna gränsvärden av olika funktioner. Eleverna kan på detta sätt ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik och därmed få en djupare förståelse för gränsvärde.

Exempel 1
Givet $g(x) = \frac{6x^3-x-5}{8x^3+3x-30}$, beräkna gränsvärdet av funktionen *g(x)* då *x* går mot oändligheten.

Lösningsförslag: Först skriver vi in funktionen $g(x) = \frac{6x^3-x-5}{8x^3+3x-30}$ i inmatningsfältet hos Geogebra. Då får vi figur 2:



Figur 2. Grafen till $g(x) = \frac{6x^3-x-5}{8x^3+3x-30}$.

Nu skriver vi i inmatningsfältet **Gränsvärde[g, ∞]** och Geogebra ger $a = 0{,}75$ till vänster i algebrafönstret, som är värdet av $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

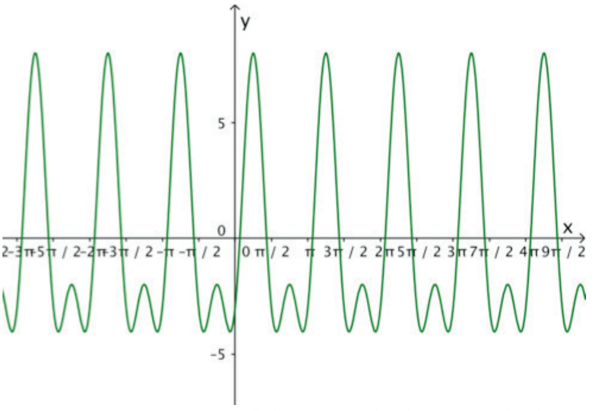
Den grafiska representationen ger oss möjlighet att se något som den algebraiska representationen inte ger. Vi kan "se" att kurvan planar ut mot ett bestämt värde. Även detta gränsvärde är naturligtvis möjligt att beräkna genom att dividera alla termer med x^3 och därigenom få 6/8 eller 3/4 utan grafisk representation. Men det finns gränsvärden som inte är så lätta att se och beräkna direkt. Så att arbeta med Geogebra kan ibland komplettera huvudräkning eller papper och penna-baserat arbete.

Vi ger ett nytt exempel där vi ska beräkna gränsvärdet av ett uttryck med trigonometriska funktioner då *x* går mot en konstant:

Exempel 2
Givet $g(x) = 5sin(2x) - 3cos(4x)$, beräkna gränsvärdet av funktionen *g(x)* då *x* går mot π/4.

Även här är det möjligt att dra sig till minnes att sin (π/2) = 1 och att cos (π) = -1, så med huvudräkning får vi att 5 + 3 = 8. Men nu var det mer arbete för huvudet och endast mycket duktiga elever kan göra detta snabbt.

Lösningsförslag: Vi skriver in $g(x) = 5sin(2x) - 3cos(4x)$ i inmatningsfältet av Geogebra och får figur 3.



Figur 3. Grafen till $g(x) = 5sin(2x) - 3cos(4x)$.

Den grafiska representationen visar också på ett periodiskt förlopp. Vi skriver i inmatningsfältet **Gränsvärde[g, π/4],** och Geogebra ger värdet $a = 8$. Detta är värdet av $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} 5sin(2x) - 3cos(4x)$.

En annan typ av gränsvärden

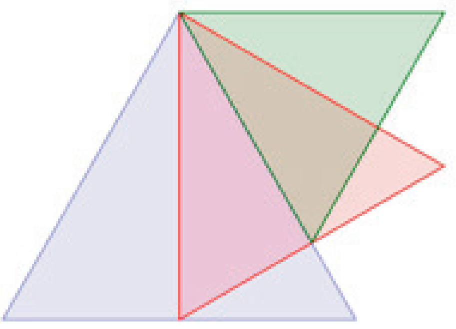
I nästa exempel ska vi studera en annan typ av gränsvärden genom att konstruera en serie av geometriska objekt och beräkna summan av dessa objekts areor då antalet objekt går mot oändligheten. Rent kognitivt är detta släkt med begreppet geometrisk summa som återfinns i centralt innehåll för Ma 3b. Under rubrik *Samband och förändring* står bland annat: *Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.*

I Ma 5 läser elever om geometrisk talföljd igen. För att konstruera elementen i en geometrisk talföljd används formeln $a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$, där k är kvoten mellan två på varandra följande element. Senare i kursen används formeln $s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$, där $k \neq 1$, för att beräkna summan av elementen av denna geometriska talföljd. Detta görs då antalet element är ett bestämt tal. Vad blir summan av elementen i en geometrisk talföljd om antalet element går mot oändligheten? I centralt innehåll för Ma 5 står under rubriken *Problemlösning* följande: *Elever ska lära sig strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.*

En skicklig lärare tar upp att antalet element i en geometrisk talföljd kan gå mot oändligheten, men det finns inte uppgifter i läroböcker där elever ska beräkna summan av elementen då antalet element går mot oändligheten.

Liksidiga trianglar mot oändligheten

Konstruera först en heltalsglidare n. Konstruera sedan en liksidig triangel med sidan n enheter lång. Konstruera höjden i den triangeln. Konstruera en annan liksidig triangel med sidan lika med höjden av den första triangeln. Konstruera höjden i den andra triangeln. Utgå från den höjden i den andra triangeln och konstruera en tredje liksidig triangel, se figur 4.

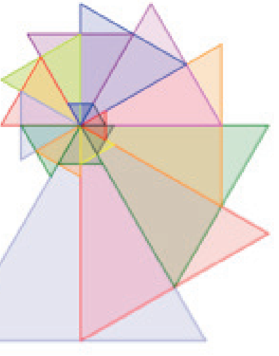


Figur 4. Liksidiga trianglar som blir allt mindre.

På det viset går det att konstruera en serie av trianglar, se figur 5.

Uppgift 3

Beräkna summan av omkretsen av dessa trianglar för $n = 3, 4, 5, 6$, då antalet trianglar går mot oändligheten. Beräkna även summan av areorna av dessa trianglar då antalet trianglar går mot oändligheten. Finn ett samband mellan dessa summor och n.



Figur 5. Ännu fler liksidiga trianglar.

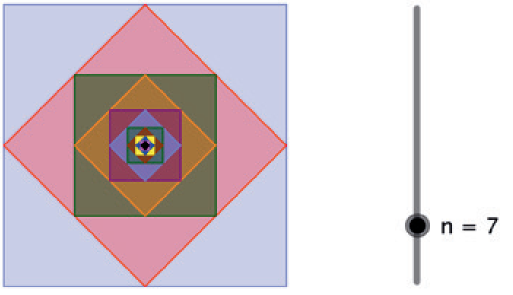
På https://www.geogebra.org/m/BkW4W5ka finns lösningsförslag till exempel 3.

I nästa exempel ska vi åter igen använda Geogebra och datorn som redskap. Det är ett nytt algebraiskt/geometriskt exempel som är lätt att konstruera i Geogebra och där det är lätt att göra en algebraisk beräkning.

Kvadrater inskrivna i kvadrater

Konstruera först en heltalsglidare n. Konstruera sedan en kvadrat med sidan n enheter lång. Konstruera en annan kvadrat inuti kvadraten. Inuti den andra kvadraten konstruera en tredje kvadrat osv. På det viset konstrueras en serie av kvadrater, se figur 6.

Uppgift 4
Konstruera ovan nämnda serie med hjälp av Geogebra och beräkna summan av areorna av dessa kvadrater då antalet kvadrater går mot oändligheten för olika värden på n. Finn ett samband mellan denna summa och n.

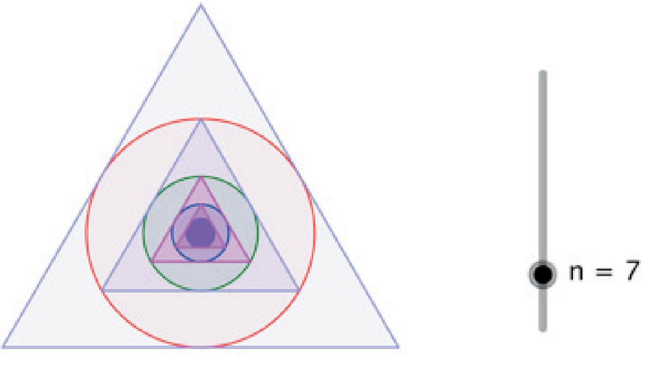


Figur 6. En serie av kvadrater inskrivna i kvadrater.

En utmaning med trianglar och cirklar

Konstruera först en heltalsglidare n. Konstruera en liksidig triangel med sidan n enheter lång. Konstruera inuti den triangeln en cirkel som har radien r. Konstruera en liksidig triangel inuti den cirkeln. Konstruera en cirkel inuti den andra triangeln. På det viset konstrueras en serie av liksidiga trianglar och cirklar, se figur 7.

Uppgift 5
Beräkna summan av areorna av trianglarna då antalet trianglar går mot oändligheten för olika värden på n. Finn ett samband mellan dessa areor och n. Beräkna även summan av areorna av cirklarna då antalet cirklar går mot oändligheten. Finn ett samband mellan dessa areor och r.



Figur 7: Liksidiga trianglar i varandra.