

Icke unik representation i vissa talbaser

I grunden för matematiken ligger den trygga talraden som vi alla tar oss an på något vis, kanske med kottar, pinnar eller fingrarna. Därifrån vänjer vi oss snart vid att varje tal som skrivs med siffror, exempelvis 52, motsvarar ett antal. Men helt trygga kan vi inte vara, ett antal kan representeras med flera olika tal!

Vi är vana vid att ett tal bara kan skrivas på ett enda sätt om bråkdelen är ändlig. Detta gäller alla vanliga baser som 16, 10, 8 och 2. Men också mer ovanliga baser som 3, 17 och så vidare. Välj vilken som helst av ovanstående baser och talet 101011 representerar ett unikt värde och kan heller inte skrivas på något annat sätt i just den valda basen. Detta är så invariant så vi har kanske svårt att ens formulera frågan om det finns icke unika representationer.

Om man väljer en riktigt obskyr bas kan ett och samma tal representeras på mer än ett sätt. Och lägg märke till att vi fortfarande använder oss av precis samma positionssystem som i tidigare nämnda fall. Nämligen om vi överger heltalen och väljer basen ϕ , det vill säga gyllene snittet, $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618...$ alltså den positiva lösningen till ekvationen $1/\phi = \phi - 1$. Denna ekvation kan enkelt skrivas om som $\phi^2 = \phi + 1$ vilket är själva nyckeln till det talsystem vi nu ska studera, men också till dess egenskap att ha icke-unik representation av tal. Vi börjar med att systematiskt lista positiva och negativa potenser av ϕ :

$$\phi^{-1} = \phi - 1 \Rightarrow \phi^2 = 1 + \phi$$

Multiplitera med ϕ^{n-2} så fås

$$\phi^n = \phi^{n-2} + \phi^{n-1} \quad \text{för } n > 2$$

$$\phi^1 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^2 = \phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^3 = \phi + \phi^2 = 2\phi + 1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^4 = \phi^2 + \phi^3 = 3\phi + 2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^5 = \phi^3 + \phi^4 = 5\phi + 3 = \frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^6 = \phi^4 + \phi^5 = 8\phi + 5 = \frac{18+8\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-1} = \phi - 1$$

Multiplitera med ϕ^{1-n} så fås

$$\phi^{-1} \cdot \phi^{1-n} = \phi \cdot \phi^{1-n} - 1 \cdot \phi^{1-n} \Rightarrow$$

$$\phi^{-n} = \phi^{-(n-2)} - \phi^{-(n-1)} \quad \text{för } n > 2$$

$$\phi^{-1} = \phi - 1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-2} = -\phi + 2 = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-3} = \phi^{-1} - \phi^{-2} = 2\phi - 3 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-4} = \phi^{-2} - \phi^{-3} = -3\phi + 5 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\phi^{-5} = \phi^{-3} - \phi^{-4} = 5\phi - 8 = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}$$



Om vi nu arrangerar på lämpligt sätt kan vi få en summa utan ϕ . Till exempel

$$\phi^3 + \phi^2 + \phi^4 = 2\phi + 1 + \phi + 1 - 3\phi + 5 = 7$$

eller om vi använder den gängse principen för ett positionssystem

$$1 \cdot \phi^3 + 1 \cdot \phi^2 + 0 \cdot \phi^1 + 0 \cdot \phi^0 + 0 \cdot \phi^{-1} + 0 \cdot \phi^{-2} + 0 \cdot \phi^{-3} + 1 \cdot \phi^{-4} = 1100,0001_\phi = 7_{\text{tio}}$$

Ur sambandet $\phi^2 = \phi + 1$ som vi så flitigt använde då vi producerade listan på föregående sida kan vi sluta oss till att teckenföljderna ...100... och ...011... är utbytbara! Om vi tillämpar det på vår representation av 7_{tio} så finner vi strax ett exempel på icke-unik-egenskapen:

$$1100,0001_\phi = 10000,0001_\phi = 1100,000011_\phi = 10000,000011_\phi = 10000,00001011_\phi$$

Här kan man fördjupa sig hur mycket som helst. Exempelvis hur man systematiskt skriver 1,2,3,4 osv med basen ϕ . Men vi har påvisat en intressant egenskap och det får räcka så. Den intresserade kan söka vidare med sökfrasen *phigits* eller *base phi number system*.

För att travestera ett populärt uttalande om binära tal, en travesti med en liten utvidgning:

– Det finns 10,01 sorters människor i världen, de som förstår sig på phigits och de som inte förstår sig på dem.

– Du menar väl 1,11?

– Ja, 1,1011. Det var ju precis det jag sa!

Rubriken säger *vissa baser* i plural. Finns det alltså fler? Någon kanske redan har gissat att det ligger till på just det viset. En annan möjlighet är talsystemet som har *fibonaccitalen* som bas. Vi kan i listan ovan se hur fibonaccitalen redan där dyker upp (med alternerande tecken för negativa exponenter). Men det finns fler kopplingar mellan det gyllene snittet och fibonaccitalen. Gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

är välbekant. Men också att man kan bestämma vilket som helst fibonaccital "lokalt", utan att behöva arbeta sig fram rekursivt, med Binets formel:

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Nu tillbaka till talsystemet. Vi formulerar och bevisar en tredelad sats:

- i. Alla heltal är antingen fibonaccital eller kan skrivas som en summa av fibonaccital.
- ii. Inget fibonaccital behöver förekomma mer än en gång, och två angränsande fibonaccital behöver inte vara termer i en sådan summa.
- iii. En representation av ett heltal som en summa av fibonaccital är inte alltid unik.

Bevis:

i. Låt N_0 vara det tal som ska representeras som en summa. Välj fibonaccitalet, F_n , så att $F_n \leq N_0 \leq F_{n+1}$, dvs. det största fibonaccitalet som är mindre än eller lika med N_0 . Om $F_n = N_0$ så är vi färdiga. Om inte så gäller att $N_0 - F_n < F_{n-1}$. För om det inte vore så, det vill säga att $N_0 - F_n \geq F_{n-1}$, skulle det följa att $N_0 \geq F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ vilket motsäger hur vi valde F_n . Låt nu $N_1 = N_0 - F_n$. Om vi upprepar den här proceduren om och om igen får vi en avtagande sekvens, $N_0 > N_1 > N_2 > \dots$. Denna sekvens kommer till slut att nå 0. Under tiden kommer vi att ha hittat de fibonaccital som summerar sig till N_0 . Följdaktligen kan alla heltal skrivas som en summa av fibonaccital.

ii. Vi såg tidigare att $N_0 - F_n < F_{n-1}$ så inget fibonaccital behöver förekomma mer än en gång i en sådan summa. Vi såg också att om F_n förekommer i summan så gör F_{n-1} och F_{n+1} inte det. Det betyder att två angränsande fibonaccital inte behöver vara termer i en sådan summa.

iii. Om, som ett exempel, ett heltal kan summeras som $F_n + F_{n-2} + F_{n-5}$ så kan denna summa i kraft av fibonaccitalens definition skrivas om som $F_{n-1} + F_{n-2} + F_{n-3} + F_{n-4} + F_{n-6} + F_{n-7}$. Representationen är alltså inte alltid unik.

(Inom parentes kan man här nämna att heltal som är ett mindre än ett fibonaccital ($F_n - 1$) har en unik representation om inget fibonaccital får förekomma mer än en gång.)

Med utgångspunkt från satsen ovan kan vi formulera talsystem, så vi gör här ett exempel där talet 52 skrivs som en summa av fibonaccital. Lägg märke till att vi nöjer oss med *en* etta på slutet i positionen för den minst signifikanta siffran, annars är vi vana vid två ettor i början av talserien (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...).

$$\begin{aligned} 52 &= 34 && + 13 && + 5 \\ &= 1 \cdot 34 + 0 \cdot 21 + 1 \cdot 13 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 10101000_{\text{Fib}} \end{aligned}$$

Återigen i kraft av fibonaccitalens definition kan vi sluta oss till att teckenföljderna ...100... och ...011... är utbytbara. Vi kan alltså återigen se exempel på *icke-unik*-egenskapen:

$$10101000_{\text{Fib}} = 10100110_{\text{Fib}} = 10011110_{\text{Fib}} = 1111110_{\text{Fib}}$$

$$34+13+5 = 34+13+3+2 = 34+8+5+3+2 = 21+13+8+5+3+2$$

Se där kom ytterligare en koppling mellan gyllene snittet och fibonaccitalen. Men framför allt har vi visat att det går att tänka sig talsystem med *icke unika representationer*. Det kan måhända till en början tyckas självklart då man första gången får principen för det vanliga positionssystemet klar för sig att representationen av ett tal måste vara unik. Men gyllene snittet är ju på så många sätt väldigt speciellt så det är klart att det är den vägen vi ska gå för att hitta ett motexempel. Och visst är det skönt att få sin världsbild omskakad ibland.

LÄNKAR

<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/phigits.html>
<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibrep.html>