Jonas Hall & Thomas Lingefjärd

Introducera trigonometriska funktioner med Geogebra

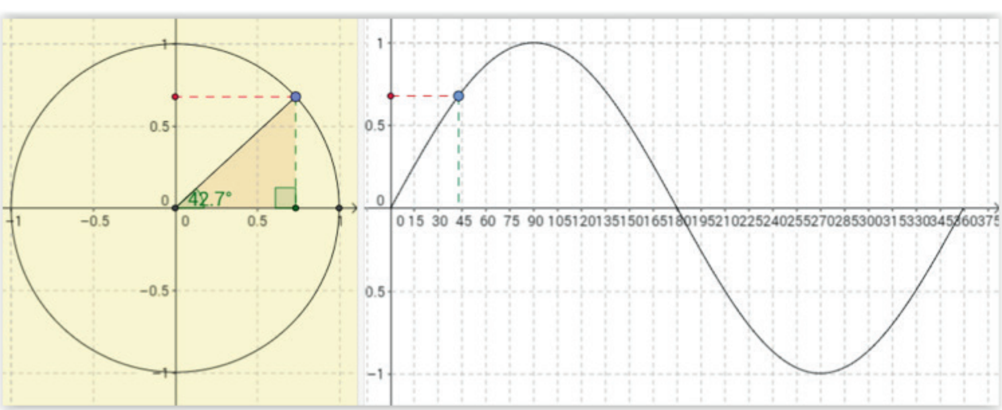
Matematik är ett ämne där egenskaper hos matematiska objekt ofta står i relation med varandra. På så vis kan vi genom att lära oss ett område också erövra kunskaper inom ett annat. Ett sådant samband existerar mellan koefficienterna av expansionen av $(a+b)^n$ och talen i Pascals triangel. Genom att förstå hur talen i Pascals triangel bildas kan vi alltså även snabbt förstå att $(a+b)^n = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Det fundamentala då vi introducerar de *trigonometriska funktionerna* och *enhetscirkeln* är just den användbara kopplingen mellan dem. Ett sätt att åskådliggöra denna koppling för en klass är att ta en tavelpenna och – vänd mot eleverna – röra den i cirklar framför dem. Be eleverna att fokusera på den konstanta farten som pennan har runt cirkeln. Be dem därefter att fokusera på pennans höjd över marken och hur den hastigheten är allt annat än konstant.

Vrid dig nu 90°. Eleverna som sitter i rörelsens plan ser nu bara en vertikal rörelse. Rör dig fram och tillbaka så alla elever ser rörelsen ur detta perspektiv. Gå sedan till den vänstra delen av tavlan och ändra rörelsen från en cirkelrörelse till bara den vertikala komponenten av denna rörelse och sätt därefter pennan mot tavlan. Rita några streck upp och ner först och börja sedan gå med jämn hastighet åt höger medan pennan ritar upp en sinuskurva. Inte sällan blir eleverna överraskade av denna enkla metod.

Nu visualiserar vi rörelsen en gång till, men den här gången med digitalt stöd. På www.geogebra.org/m/2348275 har vi placerat en Geogebra-konstruktion som illustrerar just detta. Till vänster visas enhetscirkeln med en roterande punkt längs cirkelranden och till höger ser du motsvarande sinuskurva. Med ”tavelpenna-metoden” i färskt minne kan du nu visa detta för klassen utan vidare introduktion och direkt gå in på väsentliga detaljer i kurvans anatomi.

Här mäter vi vinkeln i grader, något som för Geogebra kräver en speciell metod när du ska rita sinuskurvan. Det naturliga skulle vara att skapa den blå



Enhetscirkeln och en kommunicerande sinuskurva.

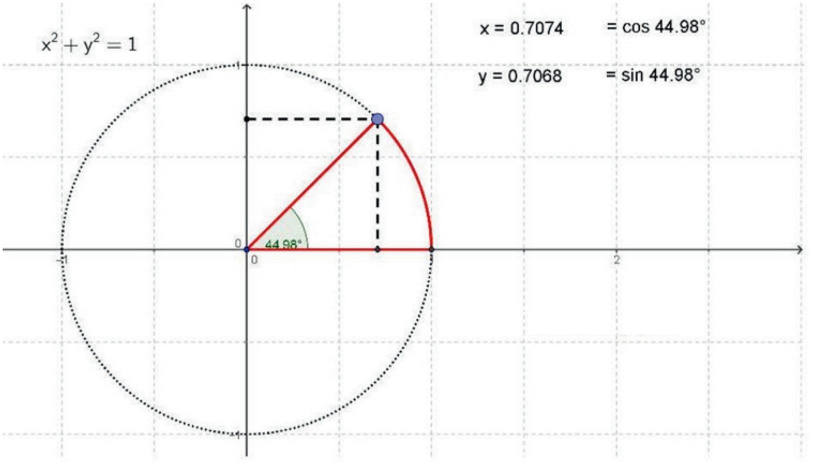
punkten D som följer sinuskurvan genom att i Ritområde 2 (där sinuskurvan syns) ange D = (*α*, *y*(A)) där *α* är vinkeln och där A är den blå roterande punkten på enhetscirkeln. Funktionen *y*(A) plockar ut A:s *y*-koordinat så att D får samma *y*-koordinat som A.

Nu är det emellertid så att Geogebra använder radianer internt så om vi enbart skriver *α* kommer Geogebra att generera vinkeln i radianer. Tecknet för grader ° används i Geogebra till att förvandla en vinkel uttryckt i grader till radianer så att Geogebra ska få rätt värde till trigonometriska funktioner. På så vis motsvarar tecknet för grader en multiplikation med konstanten $\pi/180$. När vi vill rita upp rätt grafisk representation av kurvan har vi emellertid redan radianer och vi vill i stället ha ut värdet i grader. Vi måste alltså dividera med tecknet för grader och skriver D = (*α*/°, *y*(A)).

Det här är en typisk demonstrationskonstruktion. Men då det på detta sätt blir lätt att visa de trigonometriska funktionerna i Geogebra finns inget skäl att vänta med att börja rita upp dem. Du kan alltså starta en diskussion med dina elever genom att rita upp exempelvis $f(x) = \mathrm{A}\sin(\mathrm{k}(x + \mathrm{v})) + \mathrm{d}$ och identifiera vad de olika konstanterna gör med grafen och jämföra detta med $f(x) = \mathrm{a}x^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c}$ för kvadratiska funktioner.

De trigonometriska identiteterna, som i böckerna ofta följer direkt efter introduktionen av enhetscirkeln, kan vänta till senare i kursen. Det är också en styrka att kunna lösa trigonometriska ekvationer med utgångspunkt i både enhetscirkeln och de trigonometriska funktionernas grafer, vilket är ytterligare ett skäl att ta sig an funktionernas grafer och modelleringsövningar så tidigt som möjligt.

När vi använder enhetscirkeln för att demonstrera samband och identiteter kan vi med fördel använda ett annat utseende på den. Det är inte fel att låta eleverna teckna av den nya enhetscirkeln och på så sätt få lära sig hur de snabbt tar fram sin egna personliga enhetscirkel som stöd i samband med ett prov.



Denna enhetscirkel finner du på tube.geogebra.org/student/m700913. Observera att du använder de här verktygen för att hjälpa eleverna att få korrekta interna representationer i sin mentala matematikverkstad. Du kan därför inleda samtal om värden på sinus eller cosinus, eller varför inte låta eleverna uttrycka vad de ser i verktygens representationer och varför de kanske tycker mer om ett av verktygen eller varför de tycker mindre om något annat. Via en sådan informell utvärdering skulle eleverna ändå behöva fundera på vad enhetscirkeln innebär och du får ännu ett tillfälle att bedöma och stödja elevernas kommunikativa förmåga.