

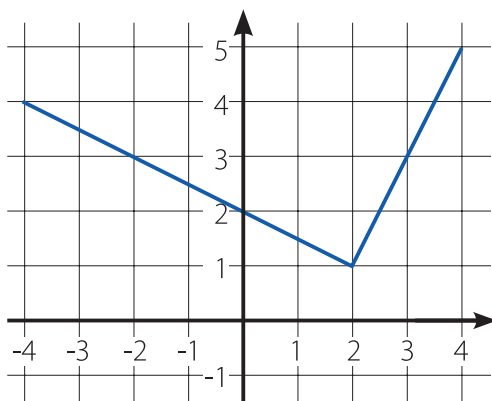
Absolut möjligt

Absolutbelopp nämns inte i kursplanerna för gymnasiet, samtidigt som förkunskaper kring dem efterfrågas av högskolan. Med utgångspunkt i en kurs för lärarstudenter konstruerades en modelleringsmetod för absolutbeloppsfunktioner, som även går att använda i gymnasieundervisningen.

Problemet

I en kurs innehållande funktionslära för lärarstudenter arbetade vi bland annat med brutna funktioner av skilda slag. Oftast ges sådana funktioner i en form som anger dem i olika intervall. Vid detta tillfälle gällde det funktionen:

$$y = \begin{cases} -0,5x + 2, & x \leq 2 \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$$



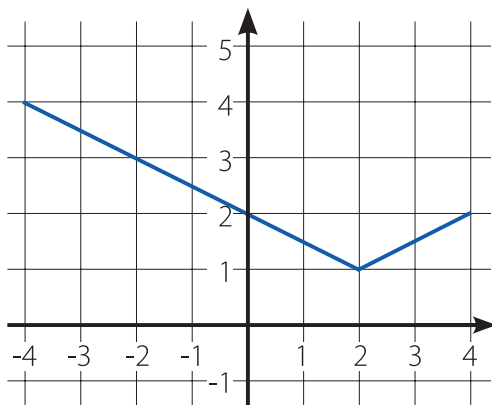
Funktionen är kontinuerlig, eftersom de två uttrycken ger samma värde för $x=2$. Här uppstod inget "hopp" som annars ofta förekommer. När vi tillsammans studerade

grafan, kom det plötsligt en fråga från en student: "Skulle man inte kunna använda absolutbelopp istället, så att funktionen bara fick ett uttryck?" Vi hade tidigare gjort övningar kring funktioner med absolutbelopp, och hon tyckte att detta verkade ganska likt. Jag hade själv inte tänkt på att det skulle gå, faktiskt mest beroende på att jag inte satt mig tillräckligt in i den typ av funktioner och vad som egentligen var möjligt. Men det här var en bra uppgift att gemensamt undersöka i gruppen, så vi satte igång, beväpnade med penna och grafräknare.

Brytpunkten för funktionen är ju $x=2$, och en vanlig absolutbeloppsfunktion med samma brytpunkt är $y=|x-2|$. Enligt definitionen på absolutbelopp är:

$$y = \begin{cases} x - 2 & \text{då } x - 2 \geq 0, \text{ alltså } x \geq 2 \\ -(x - 2) = -x + 2 & \text{då } x < 2 \end{cases}$$

Denna funktion är symmetrisk kring $x=2$, och vidrör x -axeln där. Men vår sökta funktion ska istället ha sin "spets" i punkten $(2,1)$. Dessutom ska den ha andra riktningskoefficienter än ± 1 . Lutningen kan ändras med en koefficient framför absolutbeloppet och höjdläget med en konstantterm. Om vi provar med $y=0,5|x-2|+1$ får vi något som liknar grafen vi söker:



Det är ganska nära, men grafen är fortfarande symmetrisk kring $x=2$. Nu kom någon på att man kunde ha en x -term till, utanför absolutbeloppet. Vad skulle den i så fall ha för koefficient? Eftersom absolutbeloppet ger ett symmetriskt bidrag ($\pm$), bör den vara medelvärdet av de två tidigare,

$$\frac{-0,5 + 2}{2} = 0,75$$

Koefficienten framför absolutbeloppet bör vara hälften av riktningssändringen,

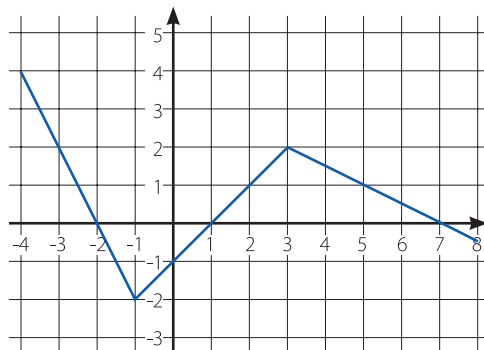
$$\frac{2 - (-0,5)}{2} = 1,25$$

och $y = 0,75x + C + 1,25|x - 2|$. Om grafen ska gå genom punkten $(2,1)$ måste då, vilket inses genom enkel insättning. Vi kunde till sist ange den färdigmodellerade funktionen: $y = 0,75x - 0,5 + 1,25|x - 2|$. Det var med spänning vi provade vår funktion. Den stämde! Det var faktiskt möjligt att använda absolutbelopp, och mina studenter hade bidragit till att både de och jag själv hade lärt oss något nytt om funktioner.

Generalisering

Nu kunde historien ha varit slut med detta lyckade företag. Men jag kunde inte släppa tanken på funktioner med absolutbelopp, som till stor del var obanad mark för mig. Vad händer om man summerar två absolutbelopp, till exempel? Om man slumpvis provar en sådan, $y = 2|x - 1| + 0,5|x - 4|$, får man en graf som är bruten i både $x=1$ och $x=4$. Den består alltså av tre sektioner i intervallen $x < 1$, $1 \leq x < 4$ och $x \geq 4$, med riktningskoefficienterna i tur och ordning $-2,5$,

$1,5$ och $2,5$. Det är inte svårt att inse hur dessa har bildats ur talen 2 och $2,5$, genom de teckenväxlingar absolutbeloppens orsakar i brytpunkterna. Men går det att göra tvärtom, att börja med en graf och konstruera det funktionsuttryck, som ger denna? Låt oss utgå från denna:



Brytpunkterna är här $x = -1$ och $x = 3$. Vidare är lutningarna $-2, 1$ samt $-0,5$ och grafen går tex genom punkten $(3,2)$.

Liksom i det ursprungliga problemet måste man utgå från "balansen", dvs medelvärdet mellan den första och den sista lutningen, när koefficienten för den fristående x -termen bestäms. Absolutbeloppstermerna ändrar ju lutningen med dubbla koefficienten, så denna måste alltså motsvara halva ändringen.

För $x=1$ har vi alltså

$$\frac{1 - (-2)}{2} = 1,5$$

och för $x=4$ blir det

$$\frac{-0,5 - 1}{2} = 0,75$$

Med insättning av x - och y -värdena i den kända punkten kan funktionen slutligen fastställas till: $y = -1,25x - 0,25 + 1,5|x + 1| - 0,75|x - 3|$

Detta ser ut som en generaliserbar metod, vilket är helt korrekt. Man kan bevisa följande allmänna formel:

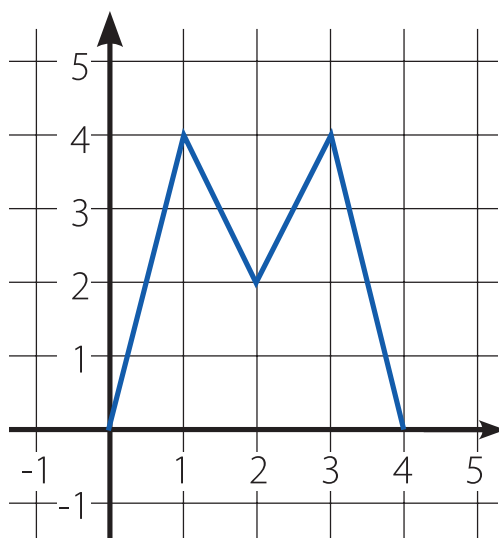
En kontinuerlig funktion, bestående av n rätlinjiga sektioner med riktningskoefficienterna $k_1, k_2, \dots, k_n$ mellan brytpunkterna $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ och som går genom punkten (x_0, y_0) , ges av:

$$y = \frac{k_1 + k_n}{2} \cdot x + C + \frac{k_2 - k_1}{2} \cdot |x - x_1| + \frac{k_3 - k_2}{2} \cdot |x - x_2| + \dots + \frac{k_n - k_{n-1}}{2} \cdot |x - x_{n-1}|$$

där C bestäms genom insättning av (x_0, y_0) .

Beviset är inte särskilt svårt. Det bygger på att man ansätter en summa av absolutbelopp med koefficienterna framför som obekanta, och sedan bildar ett ekvationssystem genom att i tur och ordning betrakta samtliga n intervall. Ekvationssystemet löses faktiskt ganska lätt och ger formeln ovan.

Låt oss prova formeln på följande "M-graf":



Observera att grafen följer x-axeln, både för $x < 0$ och för $x > 4$. Den har 6 sektioner med brytpunkterna i $x=0, 1, 2, 3$ och 4 med $k=0, 4, -2, 2, -4$ och 0 . Formeln ger:

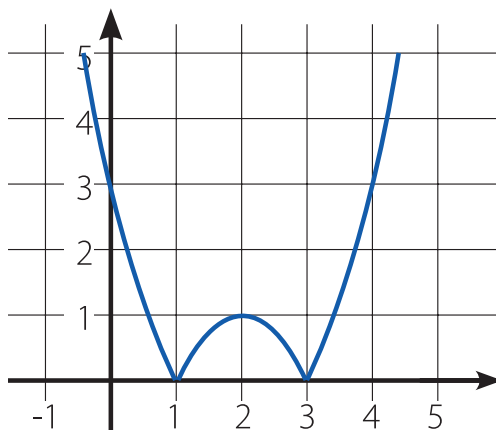
$$y = \frac{0+0}{2} \cdot x + C + \frac{4-0}{2} \cdot |x-0| + \frac{-2-4}{2} \cdot |x-1| + \frac{2-(-2)}{2} \cdot |x-2| + \frac{-4-2}{2} \cdot |x-3| + \frac{0-(-4)}{2} \cdot |x-4|$$

Insättning av punkten $(0,0)$ ger $C=0$, och den vackra funktionen:

$$y = 2|x| - 3|x-1| + 2|x-2| - 3|x-3| + 2|x-4|$$

Ytterligare generalisering

Överraskande nog kan man även modellera brutna funktioner i vilka sektionerna består av polynom av högst andra graden. En vanlig kvadratisk absolutbeloppsfunktion är $y = |(x-1)(x-3)|$.



I denna faktorerade form inser man lätt hur teckenväxlingarna sker i de tre intervallen. Men hur blir det om man flyttar ut den ena faktorn: $y = (x-1) \cdot |x-3|$? Och vad blir skillnaden mellan $y = |(x-3)^2|$ och $y = (x-3) \cdot |x-3|$? Prova gärna!

Funderingar kring detta gav upphov till att jag försökte skapa en liknande formel som ovan, användande av samma typ av bevis. Resultatet blev följande:

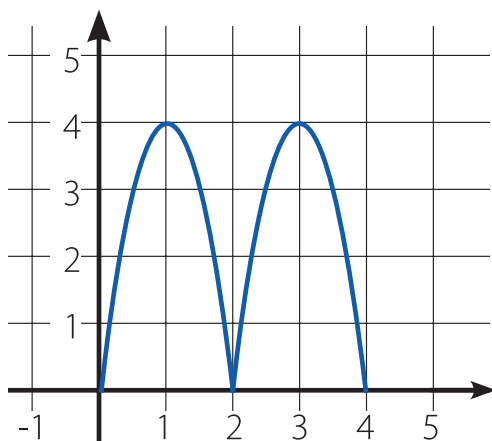
En kontinuerlig funktion med n sektioner som beskrivs av andragradsuttryck $a_k x^2 + b_k x$ mellan brytpunkterna $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ och som går genom punkten (x_0, y_0) , ges av:

$$y = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot x^2 + \frac{b_1 + b_n}{2} \cdot x + C + \left(\frac{a_2 - a_1}{2} \cdot (x + x_1) + \frac{b_2 - b_1}{2} \right) \cdot |x - x_1| + \dots + \left(\frac{a_n - a_{n-1}}{2} \cdot (x + x_{n-1}) + \frac{b_n - b_{n-1}}{2} \right) \cdot |x - x_{n-1}|$$

där C bestäms genom insättning av (x_0, y_0) .

Formeln kan i förstaste verkan verka aningen monstruös, men vid närmare påseende ser vi samma typ av medelvärden i den "fria" polynomdelen och de halverade ändringarna framför absolutbeloppen som för den första formeln.

Vi provar även denna med en "M-graf", fastän nu rundad:



Det är inte lika lätt att finna andragsuttryck för en given sektion, men lite beräkningar ger $y = -4x^2 + 8x$ för $0 \leq x < 2$ och $y = -4x^2 + 24x - 32$ för $2 \leq x < 4$. För första och sista sektionen är $y = 0$. Observera att konstanten -32 egentligen är ointressant i sammanhanget. Insättning i formeln, med punkten $(0,0)$, ger:

$$y = (-2x + 4) \cdot |x| + 8 \cdot |x - 2| + (2x - 4) \cdot |x - 4|.$$

Visst påminner det om logotypen för en viss snabbmatskedja. En sak att påpeka här är också att det i båda "M-graferna" saknades en "fri" polynomdel. Detta, inser man, hänger samman med att funktionerna är noll både för stora och för små x . Om gränsvärdet av y då x går mot oändligheten ska bli noll, måste koefficienterna i den fria delen samtliga vara noll.

Går det då att finna motsvarande formel då vi har polynom av tredje graden eller högre? Jodå, det finns sådana, men de är förstås allt mer komplicerade (den intresserade läsaren kan själv prova med tredjegradsuttryck). Det är inte utan att man blir lite stolt när man finner sådana här eleganta samband. Med säkerhet har de också beskrivits av andra i en eller annan form, men jag har inte lyckats finna något ställe som kan fungera som referens. Visst var det en fantastisk "resa" mina studenter och jag togs på genom den fråga som en av dem ställde!

Absolutbelopp i undervisningen

Studenterna som påbörjar sin utbildning till matematiklärare har oftast mycket begränsade kunskaper om absolutbelopp. Oftast har man bara sett absolutbelopp användas på vanliga tal, tex $|-7|=7$, och förståeligt nog är man frågande inför nyttan av detta. Ibland känns absolutbeloppet igen i angivelser av intervall, som $|x-5| < 2$, men här är osäkerheten stor. Och det är ännu mer ovanligt att man sett absolutbeloppsfunktioner. Varför är det så här?

I Nämnaren nr 2, 2006, beskriver Thunberg mfl vad de kallar "glappet" mellan gymnasiets mål och högskolans förväntningar. Listan över stoffområdena de menar faller mellan stolarna tar bl a upp absolutbeloppsfunktionen. De beskriver inte närmare på vilket sätt de önskar att den tas upp, men jag antar att en god förtrogenhet med användning inom ekvationer, olikheter och funktioner är önskvärt. När "mina" lärarstudenter med gymnasieinriktning kommer till analyskursen, börjar absolutbelopp flitigt användas för att beskriva intervall, exempelvis i gränsvärdesbestämningar eller härledning av derivator. I det läget bör inte utvecklingen av begreppsförståelse hindras av att man inte förstår hur absolutbelopp fungerar. Alltså måste detta område i förväg tas upp och gås igenom noga.

Nuvarande kursplaner för gymnasiet nämner inte alls absolutbelopp, ens för de högre kurserna. Det beror således helt på den enskilde läraren om och hur eleverna får arbeta med det. I planerna som utarbetats för Gy07, som för närvarande ligger på is, hade man rättat till detta "glapp". För den tredje kursen, obligatorisk för naturvetenskapsprogrammet, finns punkten *beräkningar med tal skrivna på olika former och begreppet absolutbelopp*.

Det specificeras inte närmare i vilka sammanhang begreppet ska utvecklas, men kursen innehåller såväl ekvationer och olikheter som gränsvärden och inledning till analysen. Här finns det alltså stora möjligheter att arbeta med absolutbeloppsfunktioner av liknande typ som ovan, kanske i den "omvända" versionen som modellering.

Det är också givande att lösa ekvationssystem och olikheter innehållande absolutbelopp. Man är då tvungen att fundera på uttryckens tecken i olika intervall, vilket är en utmärkt förövning till de teckenundersökningar man gör i analysen.

Funktionsövningar med absolutbelopp

Funktioner innehållande absolutbelopp kan vara en både annorlunda och rolig väg till att öva och bli förtrogen med exempelvis:

- ◇ teckenväxlingen i algebraiska uttryck när variabeln ändras
- ◇ parametrarnas betydelse i linjära och kvadratiska funktioners
- ◇ hur antalet lösningar i ekvationer och ekvationssystem bestäms av parametrarna
- ◇ modellering med linjära och kvadratiska ekvationer i intervall.

Endast fantasin sätter gränser på hur övningar som inbegriper absolutbelopp kan se ut. Här kommer några som med fördel kan bearbetas både med räknare/dator och för hand:

- A. Undersök antalet lösningar till ekvationssystemet för olika värden på konstanten m :

$$\begin{cases} y = |x - 2| \\ y = 0,5x + m \end{cases}$$

Vad händer om man ändrar koefficienten 0,5 i den andra ekvationen till 1,5? Varför?

- B. Undersök på samma sätt:

$$\begin{cases} y = |2x - 4| \\ y = m - |2x - 5| \end{cases}$$

- C. Lös ekvationen:

$$|(x-1)(x-5)| = 0,5x + 1$$

- D. Rita upp roliga konturer som är möjliga att modellera med en absolutbeloppsfunktion och konstruera sedan denna funktion. Nedanstående är tänkt att vara en kontur av en borg. Kan du ge tillhörande "borgfunktion"?

