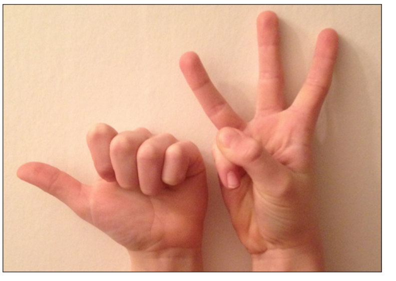
Baskunskaper i dubbel bemärkelse

Multiplikation med knutna nävar

Ett sätt att använda händerna för att utföra multiplikationerna för sexans till tians tabell fungerar så här: Håll dina två knutna nävar framför dig. En knuten näve representerar talet fem. Om du låter ett finger peka ut betyder det 6, två fingrar betyder 7 och så vidare. För att utföra till exempel multiplikationen $6 \cdot 8$, se fotot, håller du på den ena handen ut ett finger och på den andra handen tre fingrar. För att se svaret räknar du antalet fingrar som sticker ut. De anger antalet tiotal, i detta fallet fyra stycken, 40. Sedan kollar du hur många fingrar som är nedvikta i respektive hand. I vårt fall är det nu fyra fingrar i den ena handen och två i den andra. Dessa tal, 4 och 2, multiplicerar vi och får produkten 8. Denna produkt lägger vi till 40 som vi fick fram tidigare och får alltså svaret $6 \cdot 8 = 40 + 2 \cdot 4 = 48$. Testa med några andra tal, t ex $9 \cdot 9$. Åtta fingrar ut totalt (80) plus $1 \cdot 1$ (produkten av de nedvikta fingrarna) ger 81. Två lite speciella fall är $6 \cdot 6$ och $6 \cdot 7$, men de stämmer likväl.



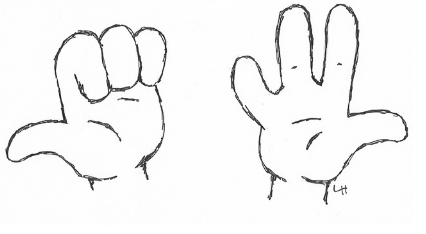
Uppgift: Visa algebraiskt att sättet att räkna stämmer.

Tips: Eftersom den knutna näven betyder 5 kan du kalla dina tal för $5 + x$ respektive $5 + y$, där x och y är antalet fingrar som sticker ut. $6 \cdot 8$ skulle då motsvaras av $x = 1$ och $y = 3$.

Andra baser

Vi räknar med tio som bas i vårt talsystem, förmodligen för att vi har tio fingrar och att det därmed är ganska praktiskt. Om vi nu antar att vi sedan tidernas begynnelse vore seriefigurer istället och hade händer som i teckningen, då hade vi förmodligen haft åtta som bas istället.

Hur skulle fingermultiplikationen fungera då? Testa! Glöm inte att du räknar i åttabas nu. Exempel $(5 \cdot 8)_{åtta}$ ger oss ett finger som sticker ut på ena handen och fyra på den andra, fem totalt. Fingrarna som är nedvikta är 3 respektive 0. Multiplikation av dessa ger 0. Alltså är $(5 \cdot 6)_{åtta} = 50_{åtta} = (5 \cdot 8 + 0)_{tio} = 40_{tio}$. Testa också med andra baser.



Uppgift: Visa algebraiskt att sättet att räkna stämmer för vilken bas som helst.

Tips: Eftersom den knutna näven nu inte betyder 5 kan du kalla dina tal för $b/2 + x$ respektive $b/2 + y$ där b är basen du för tillfället använder. Eftersom vi har två händer hamnar ju hälften av basen på varje hand.

Lösningsförslag

Vi kan kalla talen vi vill multiplicera för $5+x$ och $5+y$, där x och y är de antal fingrar som sticker ut. Om vi bara multiplicerar dem som de är får vi $(5+x)(5+y)=25+5x+5y+xy$. Låt detta vara vårt vänsterled, VL.

Om vi använder fingermultiplikationen får vi istället våra tiotal av de fingrar som sticker ut, alltså $10(x+y)$. Entalen ges av multiplikation av de fingrar som är nedvikta. Dessa är $5-x$ respektive $5-y$. Multiplikation av dessa ger $(5-x)(5-y)$. Adderar vi detta till tiotalen får vi $10(x+y)+(5-x)(5-y)=25+5x+5y+xy$. Låt detta vara vårt högerled och låt oss kontrollera om det är samma som vårt vänsterled. Jo, HL = VL. Det funkar!

För andra baser

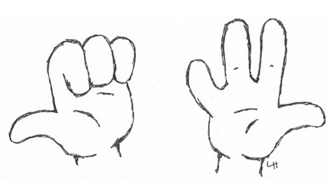
Normalt räknar vi i basen 10 och antal fingrar på ena handen är halva basen. Låt oss utvidga vår räkning till den godtyckliga basen b. På varje hand har vi då $b/2$ fingrar att röra oss med. Lustigt nog fungerar detta även för udda baser vilket antyder att man har åtminstone ett halvt (icke-helt) finger på varje hand. Utan fingrar får vi i analogi med ovanstående följande resultat vid multiplikation av talen själva

$$\left(\frac{b}{2}+x\right)\left(\frac{b}{2}+y\right)=\frac{b^2}{4}+\frac{b}{2}x+\frac{b}{2}y+xy$$

Med fingrarnas hjälp får vi $b(x+y)+(b/2-x)(b/2-y)=b^2/4+b/2x+b/2y+xy$. Det stämmer alltså då också. Följande begränsningar, för att det ska fungera praktiskt med fingrar, kan tilläggas:

$$x\in\mathbb{N},\quad 0\leq x\leq\frac{b}{2},\quad y\in\mathbb{N},\quad 0\leq y\leq\frac{b}{2}$$

Nians tabell med fingerräkning



Som du säkert känner till går det lätt att räkna nians tabell på fingrarna, upp till och med $9\cdot 10$. Om du till exempel vill multiplicera 9 med 4, då håller du fram alla fingrar, viker ner det fjärde fingret från vänster och läser sedan av. Till vänster om det nedvikta fingret har du tre fingrar, det betyder 30, och till höger om det nedvikta fingret har du sex fingrar. Summan av 30 och 6 är 36 och $9\cdot 4=36$. Testa med några andra tal i nians tabell och förvissa dig om att det funkar. Lägg också märke till att siffersumman hela tiden är 9.

Vi räknar med tio som bas i vårt talsystem, förmodligen för att vi har tio fingrar och att det därmed är ganska praktiskt. Om vi nu antar att vi sedan tidernas begynnelse vore seriefigurer istället och hade händer som på teckningen, då hade vi förmodligen haft åtta som bas istället. Testa att räkna sjuans tabell med fyra fingrar på varje hand, enklast är om du viker bort dina tummar och inte låtsas om dem. Ser du att du får rätt resultat? Glöm inte att du räknar i åttabas, exempelvis $(7\cdot 4)_{åtta}=34_{åtta}=28_{tio}$. Testa några andra baser och försök med den gångertabell som ligger ett steg under basen, till exempel treans tabell i fyrabas (använd två fingrar från varje hand). Lägg också märke till siffersumman.

Uppgift: Formulera generellt hur detta hänger ihop, både varför multiplikationen fungerar och varför siffersumman blir som den blir.

Lösningsförslag

Här följer först en liten påminnelse för vilka olika positionsvärden siffror har i ett tal, dels i tiobas och dels i valfri bas.

	Tusentalssiffra	Hundratalssiffra	Tiotalssiffra	Entalssiffra
Positionsvärde	10^3	10^2	10^1	$10^0 = 1$

	Siffra på platsen för b^3	Siffra på platsen för b^2	Siffra på platsen för b^1	Entalssiffra
Positionsvärde	b^3	b^2	$b^1 = b$	$b^0 = 1$

Varför fungerar fingermultiplikationen?

Anta att vi räknar i basen b. Vi har då bland entalen tillgång till siffrorna 0, 1, 2, 3, ..., $(b-1)$. Observera att talet som anger basen kommer att skrivas 10_b. I tiobas har vi ju siffror upp till och med 9 att röra oss med. Om vi till exempel räknar i sju-bas kommer talet sju att skivas som 10_{sju} och vi har siffrorna 0–6 att röra oss med. Den tabell som alltså kommer att funka är $b-1$. Vad får vi då för resultat i $(b-1)$-tabellen? Låt oss börja med $(b-1)\cdot 2 = 2b-2$. Om vi ska skriva ut detta tal i vår bas b kan vi först skriva om det som $b+(b-2)$. Vi ser då att vi kommer att få en etta i placerad på platsen för b^1 (vad som i tiobas skulle kallas tiotalssiffran). På platsen för entalssiffran får vi siffran $b-2$, alltså den näst högsta siffran i vår bas. (Påminner om att den högsta siffran i tiobas är 9.)

	I tiobas			I godtycklig bas b	
Multiplikation med	Tiotalssiffra	Entalssiffra		Siffra på platsen för b^1	Entalssiffra
1	0	9		0	b–1
2	1	8		1	b–2
3	2	7		2	b–3
n	n–1	10–n		n–1	b–n

På motsvarande sätt ger $(b-1)\cdot 3 = 3b-3 = 2b+(b-3)$ vilket ger en tvåa placerad på platsen för b^1 (vad som i tiobas skulle kallas tiotalssiffran). På platsen för entalssiffran får vi siffran $b-3$. Allmänt får vi då, vid multiplikation med talet n, där $n \in \mathbb{N},\ 1 \le n \le b$, följande uträkning: $(b-1)\cdot n = nb-n = (n-1)b+(b-n)$. Detta ger alltså siffran $n-1$ placerad på platsen för b^1 och på platsen för entalssiffran får vi siffran $b-n$.

För varje steg vi ökar n kommer alltså siffran på platsen för b^1 öka med ett steg, medan entalssiffran sjunker ett steg, vilket är precis det som händer vid addition med ett tal ett steg under basen, alltså addition med $b-1$ i basen b.

Siffersumman

När vi använder tiobas och räknar nians tabell är siffersumman 9 för varje produkt i tabellen. På motsvarande sätt kommer i basen b siffersumman för tabellen $b-1$ att vara $b-1$. Hur kommer det sig? Eftersom vårt n är begränsat till att ligga mellan 1 och b kan en sammanställning göras:

n	1	2	3	...	b–1	b
Siffra på platsen för b^1 dvs n–1	0	1	2	...	b–2	b–1
Entalssiffra	b–1	b–2	b–3	...	1	0
Siffersumma	0+(b–1)= b–1	1+(b–2)= b–1	2+(b–3)= b–1	...	b–2+1= b–1	b–1+0= b–1

Där syns att siffersumman hela tiden kommer att vara $b-1$. Varje gång siffran på platsen för b^1 höjs ett steg, sänks entalssiffran ett steg.

Tobias Möllerström