Güner Ahmet & Thomas Lingefjärd

Symbolen π och tredimensionellt arbete med Geogebra

I grundskolans geometriundervisning möter elever oftast tvådimensionella former trots att de har störst vardagserfarenhet av tredimensionella föremål. När eleverna ska börja bestämma area och volym av kroppar är Geogebra ett användbart digitalt verktyg för att åskådliggöra beräkningarna.

Vi människor föds in i en tredimensionell värld som vi accepterar och lär oss att hantera redan som barn. Först genom lekar då vi klättrar och hoppar, sedan i allt mer organiserad form under uppväxten. När vi börjar skolan möter vi främst en plan euklidisk värld där geometriska objekt presenteras i två dimensioner och först i slutet av grundskolan kommer matematikundervisningen i någon mening ikapp vår omvärld genom beräkningar av tredimensionella objekt. Vad gäller grundskolans matematikundervisning så är det först i kursplanen för årskurs 7–9 som ordet tredimensionell används.

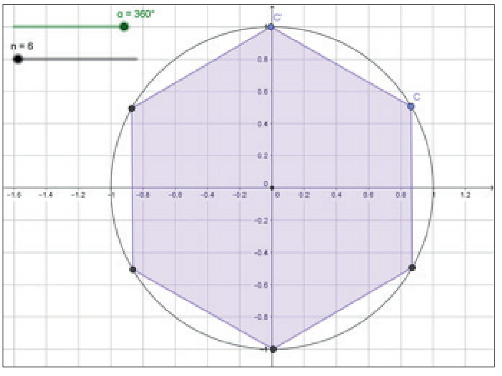
Talet π, som ibland även kallas för Arkimedes konstant, är en matematisk konstant som bland annat representerar förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter. Talet π förekommer i formler för geometriska objekt som cirkel, sfär, cylinder och kon. Eftersom cirklar och rotationer finns på många olika sätt runt omkring oss, dyker π upp på ett nästan mystiskt sätt.

Människor har säkerligen funderat på förhållandet mellan en cirkels diameter och omkrets sedan lång tid tillbaka. Den förste, som vi känner till, att försöka hitta ett bra mått var den grekiske matematikern Arkimedes. Han gick vetenskapligt tillväga och ritade en liksidig sexhörning inne i en cirkel och en annan sexhörning utanför. Han insåg att cirkelns omkrets måste ligga mellan sexhörningarnas omkretsar, vilka var enkla att beräkna. Sedan ökade Arkimedes antalet sidor i de två månghörningarna: en tolvhörning inne i cirkeln och en utanför. Arkimedes fortsatte på det sättet och när han stannade vid två 96-hörningar hade han kommit fram till att cirkelns omkrets är lika med dess diameter multiplicerat med ett tal mellan 223/71 och 22/7. Det är faktiskt två riktigt bra mått på värdet för π.

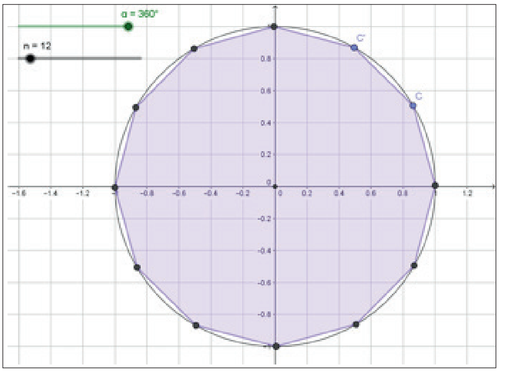
Från åskådlighet till abstrakt tänkande

Vi ska i denna artikel beskriva en metod för att beräkna ett närmevärde till π med hjälp av Geogebra. Vi ska därefter konstruera en pyramid där basen utgörs av en polygon med n hörn där vi kan låta basen gå mot en cirkel genom att vi låter n växa. På det viset kan vi genom ett abstrakt tänkande föreställa oss att n-hörningen går mot en cirkel när n går mot oändligheten. Vi kommer att använda Geogebra för att skapa tredimensionella objekt, men vi börjar som sagt med en tvådimensionell konstruktion för att beskriva Arkimedes arbete.

Vi konstruerar först en cirkel **c** med center i origo och radien $r = 1$ samt en heltalsglidare för vinkeln v, där $0° \leq v \leq 360°$. Vi ställer v på 360° och säkerställer att v verkligen är definierad som vinkel. Därefter konstruerar vi två heltalsglidare som vi benämner n där $3 \leq n \leq 100$ och H, där $1 \leq H \leq 5$. Vi konstruerar ännu en glidare u, där $0 \leq u \leq 1$ med steg 0,005 och konstruerar en punkt C på cirkeln.



En regelbunden 6-hörning i en cirkel.

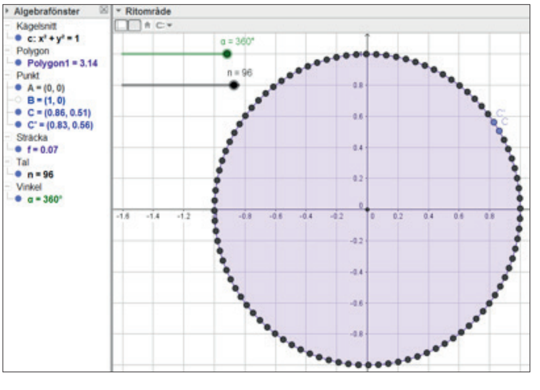


En regelbunden 12-hörning i en cirkel.

En 96-hörning konstrueras

Punkten C' konstruerar vi på följande sätt: Vi skriver i inmatningsfältet **C' = Rotera[C, v/n]** och Geogebra skapar då punkten C'. Sedan skriver vi i inmatningsfältet **Polygon[C, C', n]**. På det viset har vi konstruerat en n-hörning inuti cirkeln med radien $r = 1$.

Genom att använda Geogebra som hjälpmedel kan vi lätt även konstruera en 96-hörning så som Arkimedes konstruerade den på 200-talet före Kr.

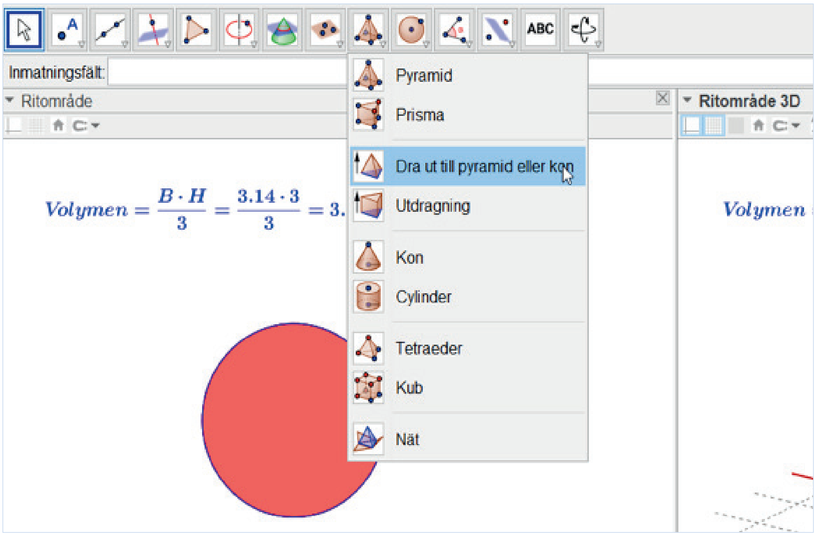


En regelbunden 96-hörning.

Med $n = 96$ kan vi i algebrafönstret avläsa att Polygon1 har arean lika med 3,14 vilket stämmer med närmevärde av π med två decimaler. Geogebra beräknar omkretsen av polygonen om vi skriver **Omkrets[Polygon1]** i inmatningsfältet. Dividerar vi detta värde med diametern av cirkeln (= 2), får vi 3,14 och detta värde på π används i grundskolans matematikundervisning.

Från två till tre dimensioner

Vi går nu från tvådimensionell till tredimensionell representation av geometriska objekt. Vi vill konstruera en pyramid med basen Polygon1 som vi konstruerade ovan och höjden **H**. Vi väljer **Visa** och **Ritområde 3D**. I nionde menyalternativet från vänster väljer vi **Dra ut till pyramid eller kon** och klickar på botten av prisman i Ritområde 3D och skriver **H** i den nya rutan som öppnas.

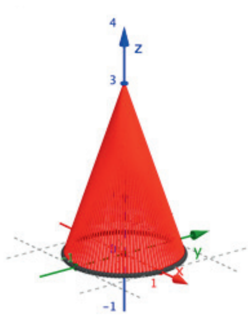


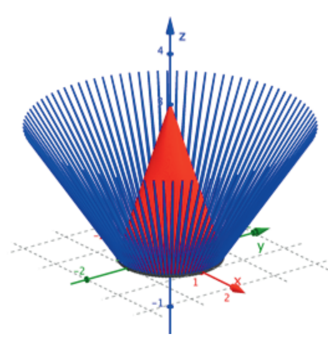
Menyalternativ under 3D.

Nu har vi konstruerat en pyramid med höjden **H** i 3D. Med glidaren n kan vi ändra botten av prisman från en triangel till en 96-hörning. I algebrafönstret till vänster under **Pyramid: v** beräknar Geogebra volymen som är lika med pyramiden. Vi ser att om vi väljer **H** = 3, och när botten av prisman närmar sig en cirkel då $n = 96$, då närmar sig volymen av prisman π. Vi kan då säga att pyramiden går mot en kon. Vi känner formeln som beskriver volymen av en kon:

$$V = \frac{B \cdot H}{3}$$

där B är bottenarean och H höjden av konen. När B är lika med arean av en cirkel med radien $r = 1$ och H = 3 får vi volymen V = π.

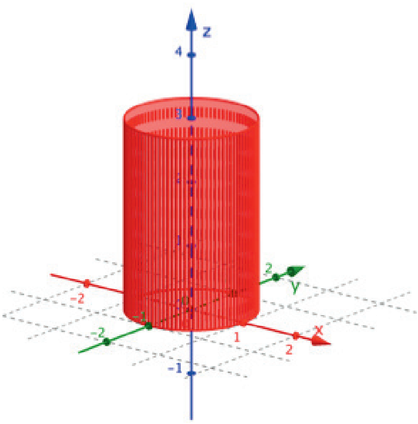




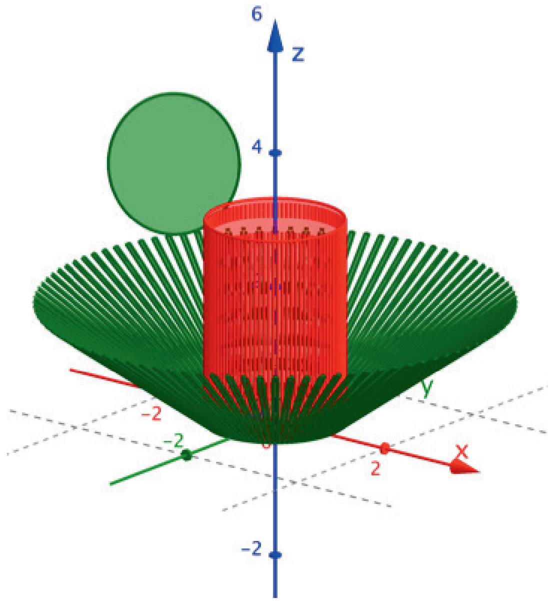
För att öppna pyramiden använder vi kommandot **Nät[<Polyeder><Tal>]**. Vi skriver i inmatningsfältet **Nät[v, u]**, väljer animering på **u** och får en vacker applikation i 3D. Under **Nät: w** beräknar Geogebra den totala arean av pyramiden.

Från prisma till cylinder

Vi vill även göra en konstruktion av en prisma och låta den gå till en cylinder. Vi använder konstruktionen för Polygon1 som botten av prisman. Vi väljer **Visa** och **Ritområde 3D**. Från nionde kommandofönstret väljer vi **Utdragning**, klickar på botten av prisman i 3D och skriver **H** i den nya ruta som öppnas. Geogebra konstruerar en prisma. Genom att välja kommandot **Nät[<Polyeder><Tal>]** kan vi öppna prisman. Vi kan laborera med den och undersöka hur volymen av prisman ändras genom att välja olika värden på ***n*** och **H**.



Nät

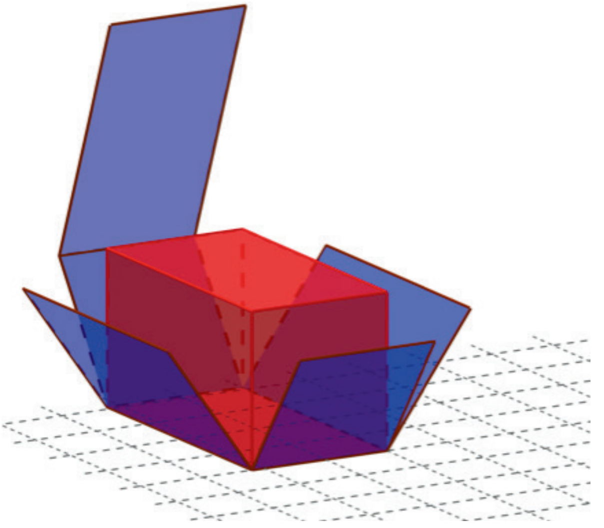


Nät och 3D.

En låda att fälla ihop

Slutligen vill vi konstruera en hopfällbar låda i Geogebra och beräkna dess volym och totala area. Vi börjar med att skapa tre glidare **a**, **b** och **c** med minsta värde 1 och maximumvärde 10 med steg 0,1. Vi skapar också en glidare **e** med minsta värde 0 och största värde 1 med steg 0,005. Vi väljer kommandot **Prisma[<Punkt>,<Punkt>,...<Punkt>]** och skriver i inmatningsfältet: **Prisma[(a,0,0), (a,b,0), (0,b,0), (0,0,0), (a,0,0), (a,0,c)]**.

På så vis har vi skapat ett rätblock. Till vänster i algebrafönstret under **Prisma** beräknas volymen av rätblocket. Nu använder vi kommandot **Nät[<Polyeder><Tal>]**. Istället för **<Polyeder>** skriver vi prismans



beskrivning i algebrafönstret och istället för **<Tal>** skriver vi **e**. Under **Nät** i algebrafönstret är arean av rätblocket beräknad. Vi kan ändra namn på glidarna **a**, **b** och **c** till **Längden**, **Bredden** och **Höjden**. Vi kan då laborera och se hur area och volym av rätblocket ändras då vi ändrar glidarna.

Förmågor värdefulla i arbets- och samhällsliv

Att låta elever undersöka konstruktioner med hjälp av Geogebra i skolans matematikundervisning, men kanske också på fritiden med riktade uppdrag från läraren, kan säkerligen få fler elever att bli mer intresserade av matematikämnet. Dessutom är det en bra förberedelse för vissa gymnasieprogram. Vi avslutar denna artikel med ett tänkvärt citat från Skolverket:

> *Eleverna ska ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik. De ska också ges möjlighet att utveckla ett kritiskt och ansvarsfullt förhållningssätt till digital teknik, för att kunna se möjligheter och förstå risker samt för att kunna värdera information. Därigenom utvecklar eleverna förmågor som är värdefulla i arbets- och samhällslivet och vid vidare studier.*

LÄNKAR

Du hittar Geogebrafiler till samtliga figurer på följande länkar:

https://www.geogebra.org/m/JrxaHY7M
https://www.geogebra.org/m/rbZd9kfN
https://www.geogebra.org/m/jjDnvneY
https://www.geogebra.org/m/avTh7hAZ

På Nämnaren på nätet finns länkarna klickbara.