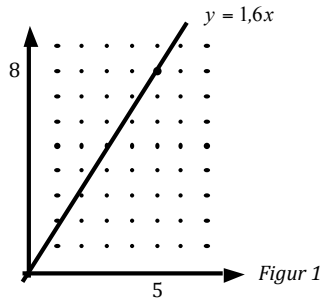


Räta linjer och täta punkter

Om man betraktar räta linjer på formen $y=kx$, kan man fråga sig vilka av alla dessa linjer som passerar genom punkter med heltal i båda koordinaterna. Kan vissa räta linjer ha många sådana punkter och kan andra räta linjer ha några få?

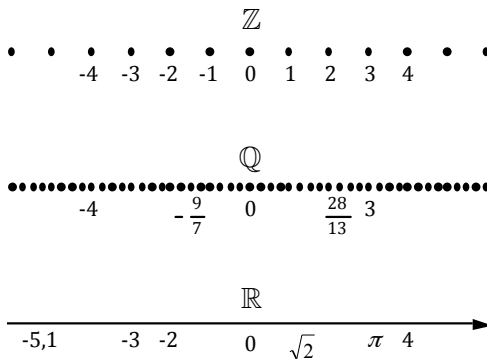
Man inser att en linje som t ex $y=1,6x$, bland alla sina decimala koordinatpar innehåller punkterna $(5;8)$ $(10;16)$ $(15;24)$... utan slut, se figur 1.



På liknande sätt får vi med ett k -värde mindre än 1: $y=7x/31$ ger $(31;7)$ $(62;14)$... osv. Samma resultat. Vad vi än väljer, får vi heltalskoordinater hela vägen ut. Och tänker man efter, är detta rätt självklart. Men istället för att avsluta redan här, låt oss kort se lite på hur våra talmängder är konstruerade.

Från diskret till kontinuerlig

Med de *hela talen*, $\mathbb{Z}$, får vi en *diskret* talrad, så som punkter utlagda med luft emellan, se figur 2a. Med införandet av bråk får vi de *rationella talen*, $\mathbb{Q}$, se figur 2b. Att det blir trångt förstår man, då man inser att mellan två tal i bråkform, hur tätt de än ligger, finns det alltid oändligt många nya, igen och igen i en evig process. Trångt alltså, men fortfarande diskret.



Figur 2a,b,c

Slutligen; med införande av de *irrationella talen*, dvs de tal som inte kan skrivas på formen a/b , får vi äntligen en linje som vi kan rita utan att lyfta pennan; ett *kontinuum*, se figur 2c. Vi har alltså:

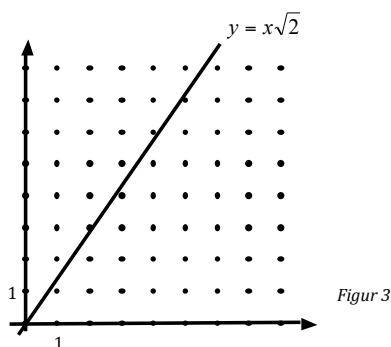
de rationella talen + de irrationella talen = mängden av de *reella talen*, $\mathbb{R}$.

Från allt till inget

Redan *Pythagoras* visste att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, dvs $\sqrt{2} \neq a/b$. Så vad händer om vi nu lägger in linjen $y = x\sqrt{2}$ i vårt gitter av heltalskoordinater? Kommer den linjen också att stöta på punkter i en evig ström? Låt oss se hur det blir om vi sätter in heltalspunkten $(m;n)$ i linjen ovan:

$$n = m\sqrt{2} \Rightarrow \frac{n}{m} = \sqrt{2}$$

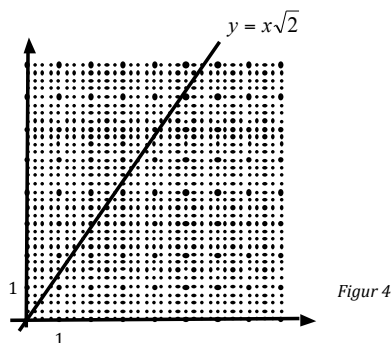
vilket som sagt, redan de gamla grekerna visste är felaktigt. Den här linjen uppför sig helt annorlunda. Den kommer till skillnad från de andra, att lyckas ta sig fram utan att vidröra *en enda punkt* på sin väg ut mot oändligheten, se figur 3.



I ett försök att få in åtminstone en träff på denna linje, förtätar vi nu vårt gitter och det ganska rejält. Vi öser helt enkelt in alla(!) punkter med bråktalskoordinater, där det redan mellan noll och ett som bekant, finns oändligt många. Kan linjen ta sig igenom även denna konstruktion? Återigen tar vi en godtycklig punkt, $(a/b;n/m)$, sätter in i vår linje $y = x\sqrt{2}$ och får:

$$\frac{n}{m} = \frac{a}{b}\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{nb}{ma}$$

som är rationellt, vilket vänsterledet inte är, dvs en motsägelse. Så trots att gallret, milt uttryckt, nu är tätt, kan vi konstatera att även denna gång smiter den rackar'n igenom helt friktionsfritt utan en enda kontakt, se figur 4.



En annan aspekt

De reella talen har även en annan indelning. Det är samma tal så klart som innan och samma linje, men kategoriseringen är en annan. Följande tal:

$$\sin 24^\circ \quad \sqrt{6} \quad \pi \quad \lg 3 \quad 5^{1/7}$$

är alla exempel på reella tal som är irrationella. Men om vi tar två av dem och kvadrerar, får vi:

$$\begin{array}{ll} \sqrt{6}^2 = 6 & \text{ett rationellt tal} \\ \pi^2 \approx 9,869... & \text{fortfarande irrationellt.} \end{array}$$

Det är nånting som skiljer dem åt. Vi har därför följande distinktion: de tal som är lösningar till algebraiska ekvationer, dvs polynomekvationer med rationella koefficienter, kallas för *algebraiska tal*. Tal som *inte* är lösningar till sådana ekvationer, kallas för *transcendenta tal*. Nedan visas några exempel.

Algebraiska ekvationer	Algebraiska tal
$5x - 40 = 0$	8
$x^{14} - 10x^7 + 12 = 0$	$\sqrt[7]{5 + \sqrt{13}}$
$x^2 - 2 = 0$	$\sqrt{2}$

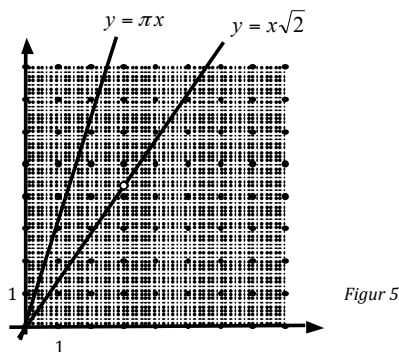
Transcendenta tal är t.ex.
 $\pi \quad e \quad \ln 2$

Som vi ser kan de algebraiska talen vara både rationella och irrationella. En lika naturlig indelning av den kontinuerliga tallinjen är därför följande:

de algebraiska talen + de transcendenta talen = mängden av de reella talen, $\mathbb{R}$.

Så låt oss förtäta vårt gitter en sista gång. Nu pressar vi in även de irrationella algebraiska talen, ännu en oändlig mängd.

Äntligen kan vi fånga in vår linje $y = x\sqrt{2}$, för väljer vi t.ex. punkten med x -koordinaten 3, får vi direkt talparet $(3; 3\sqrt{2})$ som är en algebraisk punkt och som därmed finns med i vårt senaste gitter, se figur 5.



Men precis när vi tror att segern är vunnen, får vi syn på linjen $y = \pi x$. Vi gör som vanligt en kontroll, och väljer punkten $(\alpha; \beta)$ där båda koordinaterna är algebraiska tal.

Går vi in en sista gång i linjens ekvation, får vi,

$$\beta = \pi\alpha \quad \Rightarrow \quad \pi = \frac{\beta}{\alpha}$$

som är en motsägelse då π är transcendent och kvoten av två algebraiska tal alltid blir ett nytt algebraiskt tal. Vi kan bara se på, sucka och konstatera, att på sin färd från origo och vidare bort utan slut, kommer den linjalraka linjen $y = \pi x$ att passera genom denna ryamatta av punkter utan att någonstans på vägen tangera en enda av dem, se figur 5.

Oväntad rikedom

Under seklernas gång har så klart människans kunskap om π ökat. Men dess inre liv avslöjades inte på allvar förrän i mitten på 1700-talet, då *Lambert* bevisade att π är irrationellt. Drygt hundra år senare fördjupades insikten, då *Lindemann* lyckades med bedriften att visa att π även är transcendent, dvs π kan inte vara lösningen till en algebraisk ekvation.

Med sitt berömda diagonalbevis från år 1891 kunde *Cantor* fastslå att de reella talen inte går att numrera. Han lyckades också visa, vilket kanske är mindre känt, att det är tvärtom med de algebraiska talen: dessa går att ställa upp på en rad i en lista. Då inser vi att vi inte kan dra någon annan slutsats än att den enda mängden som bidrar till det *icke numrerbara*, den överlägset största mängden, är den transcendenten.

Länge trodde man att de transcendenten talen bara var undantag, obskyra anomalier, och än idag är det fortfarande mycket svårt att vaska fram några, om uttrycket tillåts. Så situationen för våra kära gamla tal får väl sammanfattas så, att de som vi känner absolut sämst till, som diffusa figurer i marginalen, har visat sig vara de som dominerar utrymmet totalt på den reella tallinjen. Det är de transcendenten talen som utgör normen.

NOTER OCH HISTORIK

Vi har i denna artikel begränsat oss till de reella talen. Det existerar både algebraiska och transcendenten tal bland de komplexa talen. Några av de som kommit med avgörande bidrag till utvecklingen av teorier om dessa tal är: Pythagoras, berömd för satsen som bär hans namn, 500 fKr

J. H. Lambert, schweizisk matematiker, 1728–1777

F. Lindemann, tysk matematiker, 1852–1939

Georg Cantor, tysk matematiker, 1845–1918, mängdlärans upphovsman