UPPSLAGET

ANDREJS DUNKELS

Först se men inte röra — sedan klippa till och göra

Första övningen

(fr o m grundskolans åk 3)

Här läser förslagsvis läraren frågor och anvisningar och klassen följer med. Kan göras i helklass. Frågorna kommer säkert ofta att besvaras av flera elever i korus. Det är lämpligt att man då upprepar frågan och låter några elever få svara. (På högre stadium går denna övning fort.)

1. Blunda — med båda ögonen.
2. Föreställ dig en låda — fortsätt att blunda.
3. Vad är lådan gjord av?
4. Är den stor?
5. Skulle du få plats i den?
6. Tänk dig en så stor låda att du skulle få plats i den.
7. Föreställ dig nu en liten låda. Fortsätt att blunda.
8. Tänk dig en så liten låda att det bara får plats en fingerborg i den.
9. Tänk dig en lång låda.
10. Har din låda något lock?
11. (Se nedan.)
12. Tänk dig nu en låda som har kvadrater till sidoytor runt om.
13. Visst minns du vad en kvadrat är?
14. Beskriv en kvadrat.
15. Har din låda kvadrater till sidoytor nu?
16. Också bottenytan ska vara en kvadrat. Är den det nu?
17. Vad kallar man formen på en sådan låda som du nu har framför dig?
18. Om din kubiska låda har lock så ta av det.
19. Har du nu en låda utan lock framför dig?
20. För att vara säker på att du inte har något lock, häll gula ärtor i lådan.
21. Häll ut ärtorna igen.
22. Vad är din låda gjord av?
23. Tänk dig nu att den är gjord av papp.
24. Beskriv vad du har framför dig nu. (Fortsätt att blunda.)
25. Hur många kvadrater har lådan?
26. Varje sådan kvadrat kallar man alltså för en sidoyta. Även bottenytan kallas för sidoyta. Hur många sidoytor finns det alltså?
27. Tänk dig nu att du ska använda din låda på ett något ovanligare sätt. Du ska ha den till att skydda golvet medan du målar om en dörr. Då måste du breda ut lådan. Hur kommer det att se ut? Du vill breda ut så att alla fem sidoytorna syns. Och så att de sitter ihop. Dra dig inte för att använda sax. Fortsätt att blunda. Men klipp försiktigt. Det får inte bli några lösa kvadrater.
28. Har du lådan utbredd framför dig nu?
29. Hur många kvadrater ser du?

30. Sitter alla fem kvadraterna ihop?
31. Vik ihop utbredningen igen. Får du tillbaka lådan?
32. Ser du lådan nu?
33. Gör nu lådan så stor att varje kvadrats sida är ungefär så lång som ditt pekfinger.
34. Bred ut lådan igen så att du ser alla sidoytorna och lägg på minnet hur utbredningen ser ut.
35. Öppna ögonen — vänj dig vid ljuset — och rita utbredningen på ett papper.

Anm. Det är inte nödvändigt att ta upp precis alla 35 punkterna och man får givetvis anpassa övningen till den klass man har. Man skulle kunna tänka sig att göra en utvikning efter punkt 10 och lägga in detta:

11. Vet du hur ett Festis-paket ser ut?

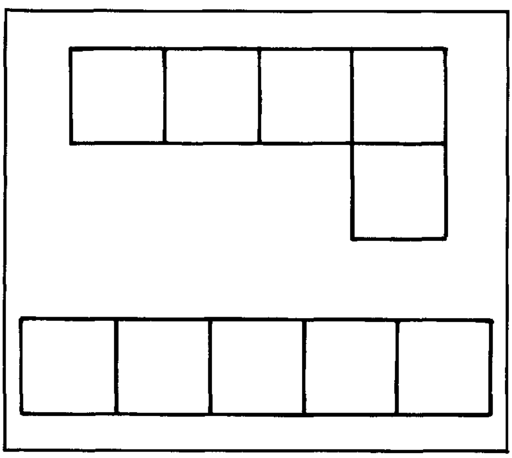
Sedan skulle man kunna få fram att sidoytorna är liksidiga trianglar, innan man går tillbaka till lådan och gör sidoytorna kvadratiska.

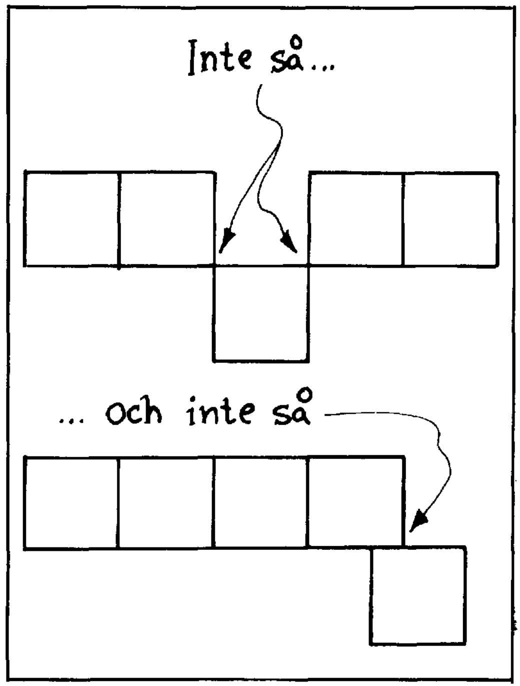
Andra övningen

(pkt 1—4 och 9 ev 10 fr o m åk 3; hela fr o m åk 5)

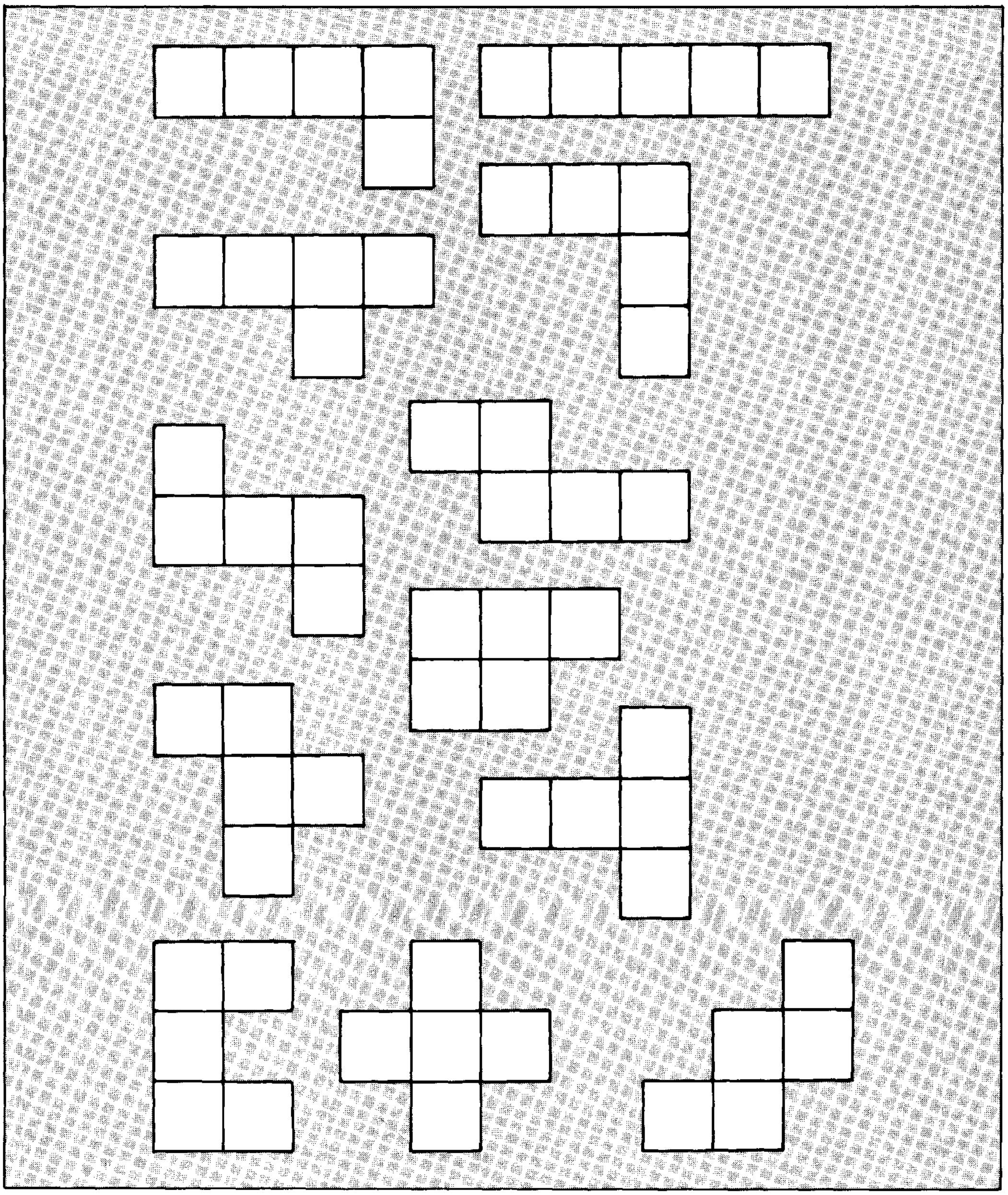
Nu samlas man i mindre grupper; 3—4 elever i varje grupp.

1. Jämför utbredningarna.
2. Var och en i gruppen berättar för de andra hur man viker för att få tillbaka lådan. Detta görs *utan* att man klipper och verkligen viker. Det skall bara vara berättande, handviftande och pekande.
3. Lägg märke till vilken av kvadraterna som blir bottenyta. Kan man vika på flera sätt så att någon annan kvadrat blir bottenyta? Fortfarande bara prat, tänkande och pekande.
4. Kan man av de två mönstren nedan vika sig en låda utan lock?





5. Till vänster finns två mönster gjorda av fem kvadrater. Mönstren är sådana att om man klipper ut dem så faller de inte isär. Det finns ingen risk att någon kvadrat lossnar. Kvadraterna sitter ihop längs en hel kant. (Se ovan.) Kan du föreställa dig fler mönster gjorda av fem kvadrater på samma sätt? Rita så många som ni kan komma på i gruppen. (Titta inte på nästa sida i förväg.)



6. Diskutera fem-kvadratsmönstren som gruppen har kommit på. Avgör om det finns några mönster som är lika. Vad skall man mena med lika mönster? Räkna hur många *olika* mönster ni kom fram till.

7. Låt oss säga att två mönster är lika om det går att flytta, vrida eller vända det ena så att det sammanfaller med det andra. I så fall finns det allt som allt 12 olika femkvadratsmönster. Ovan är alla utritade. Fick din grupp med alla?

8. Fortfarande *utan* att klippa och verkligen vika, avgör vilka av de 12 mönstren som det går att vika en låda utan lock av. Markera vilka kvadrater som kan bli bottenyta.

9. Nu skall du äntligen få klippa och klistra ihop lådor utan lock.

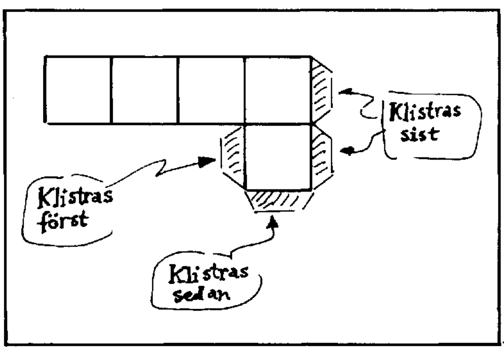
I detta moment är det bäst att använda vanligt papper. Men innan du börjar klippa ut de åtta möjliga mönstren så måste du tänka en stund på flikar. Man skulle visserligen kunna använda tejp, men det blir finare om man klipper ut flikar och använder klister.

Nedan ges ett förslag på flikplacering. Det går att sätta flikarna på andra sätt också. Jag har funnit detta bäst, ty då får man en sidoyta helt utan flikar. Den kan man vika ned och klistra sist. Speciellt viktigt blir detta när man gör lådor med lock. — Gör nu lådor så att var och en i gruppen har åtminstone tre lådor.

10. Någon i gruppen bestämmer ett av de åtta möjliga lådmönstren. Var och en i gruppen tar en färdig låda. Och nu gäller det att klippa upp lådan så att utbredningen blir precis det mönster som hade bestämts. — Gör gärna om momentet en gång till.

11. Utgå från 8 färdiga lådor. Klipp dem så att du åstadkommer alla de 8 möjliga mönstren. (Något eller några har du klarat av redan i föregående moment. För att snabbt tillverka lådor för detta moment kan man tejpa istället för att klippa med flikar och klistra.)

Viktigt tips: Om du vill gå vidare härifrån och göra lådor eller andra modeller för att spara, så är det bäst att använda hård kartong. Inte alltför tjock. Då gör du klokt i att göra *ritsar* innan du viker. Ritsen skall göras så att den efter vikningen kommer utåt. Använd linjal, på fri hand blir det alltför snett och darrigt. Ritsa försiktigt, men bestämt. Ritsen får inte skära igenom hela kartongen, men måste komma under ytan.



Tredje övningen

(fr o m grundskolans åk 6)

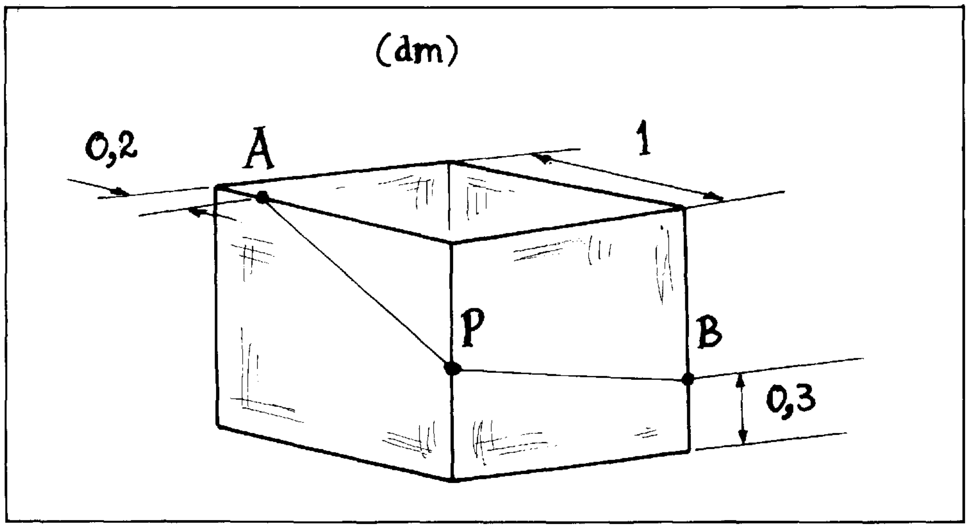
Utbredningen av lådan utan lock är ett exempel på en *pentomino*-bit. "Pent" därför att man har 5 kvadrater, och "penta" är "fem" på grekiska, "omino" därför att biten påminner om en domino-bit, som har två kvadrater. Alla pentominobitar ser du i figuren på s 48.

Sätter man ihop 3 kvadrater på samma sätt som förut (jfr högra fig på s 47) så får man triomino-bitar. Har man 4 kvadrater blir det tetromino- bitar, och med 6 kvadrater blir det hexomino- bitar. ("Tri" betyder "tre", "tetra" betyder "fyra", "hexa" betyder "sex" på grekiska.)

1. Hur många olika triomino-bitar finns det?
2. Hur många tetromino-bitar finns det?
3. Gå nu tillbaka till figuren på s 48 där alla de 12 pentominobitarna finns. Eftersom varje bit har 5 kvadrater så har vi allt som allt $5 \cdot 12 = 60$ kvadrater. Då uppstår frågan: går det att lägga pentominobitarna så att de precis täcker en rektangel med dimensionerna $5 \cdot 12$? Det visar sig att det *är* möjligt! Klipp ut pentominobitar ur hård kartong. Se till att du har ritat streck på båda sidorna så att man kan vända vilken sida som helst uppåt. Klarar du pentominopusslet?
4. (Lämpligt som projekt över en längre tid.) Hur många hexominobitar finns det? Sätt upp ett stort papper på en vägg i klassrummet. När någon i klassen tror sig ha kommit på en ny hexominobit ritar hon eller han den på papperet — med blyerts. Så får övriga i klassen kontrollera och när man kommit överens om det är rätt fyller man i med någon färg. Så småningom har man funnit alla tänkbara.

Fjärde övningen

(fr o m högstadiet; moment 2 ev även för åk 5 och 6)



Den flitiga myran Mini-Max är så klok att han alltid minimerar allt som inte är bra och maximerar sådant som är bra. Nu vill Mini-Max promenera från punkten A till punkten B och på en av de lådor som du vikt ihop. Mått och lägen framgår av fig ovan. Vi antar att varje kvadrat har sidlängden 1 dm. Mini-Max vill givetvis minimera vägsträckans längd för sin promenad. Mini-Max kommer då att först gå från A rakt fram till någon punkt P och sedan från P rakt fram till B. Hans problem är att hitta läget av punkten P. Och det är det du skall hjälpa honom med.

1. *För alla.* Utnyttja de övningar du gjort med utbredningar, vikningar och klippningar för att hitta P.
2. *För högstadieelever som lärt sig likformighet.* Använd utbredning och likformighet för att *räkna* ut avståndet från övre kanten rakt ned till P.
3. *För gymnasister som lärt sig att använda derivator.* Även om det varken ger den enklaste eller elegantaste lösningen, använd derivatan som hjälpmedel för att bestämma läget av P. Inför t ex avståndet från övre kanten rakt ned till P som variabel x.
4. *Extrauppgift, något på sidan om, för deriverande gymnasister.* Antag att det är olika material i den sidoyta som innehåller A och den som innehåller B så att Mini-Max bara kan röra sig hälften så fort mellan A och P som mellan P och B. Var skall då P väljas för att tidsåtgången för promenaden skall bli minimal?

Litteratur som inspirerat mig till detta "Uppslag" och som kan ge idéer till vidareutveckling.

M Walter, *A second example of informal geometry: milk cartons.* I "Readings in Geometry from the Arithmetic Teacher", NCTM 1970, s 48—50.

M Walter, *Boxes, Squares and Other Things.* NCTM 1970.

M Walter, *Polyominoes, Milk Cartons and Groups.* Mathematics Teaching 43 (1968), s 12—19.

Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, Martin Gardner, ed. New York 1959, kap 13.

S K Stein, *Mathematics, The Man-Made Universe.* San Francisco 1976.

J Kongsted, *Regeneration i polygonriget.* Matematik 8 (1980).

M J Wenninger, *Polyhedron Models for the Classroom.* NCTM 1975.