Thomas Lingefjärd

Geogebra i gymnasieskolan

En tilltalande egenskap med Geogebra är att programmet kan användas tvärs över stora delar av utbildningssystemets matematikkurser. Författaren har i tidigare artiklar i Nämnaren visat hur Geogebra kan användas i grundskolans matematikkurser och i den här artikeln ges förslag på hur programmet kan användas inom olika delar av gymnasiets matematikkurser.

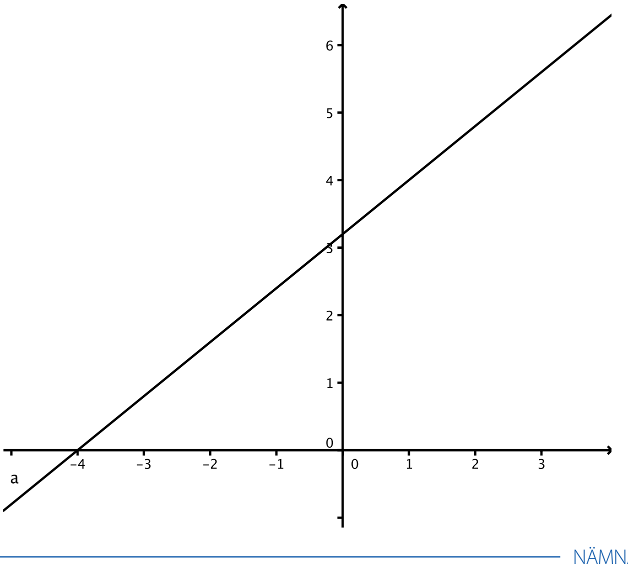
Precis som var fallet med förra artikeln, *Geogebra för de yngre* i Nämnaren nr 1, 2009, så kan du finna alla Geogebra filer på Nämnarens webbplats, ncm.gu.se/geogebra. Programmet är översatt till svenska, men jag tar gärna emot förslag på förbättringar om min översättning blivit fel. Exempel 1 – 3 nedan är hämtade från Geogebras wiki, www.geogebra.org och är delar av workshopar som är utvecklade av Markus Hohenwarter, programmets skapare, och bearbetade och översatta av mig.

Exempel 1

Ett grundläggande matematikområde i gymnasiets kurser är funktionslära och det finns olika sätt att definiera linjära funktioner i Geogebra. Vi börjar med att starta programmet Geogebra (hämta Geogebra från www.geogebra.org om du inte redan har gjort det) och väljer att visa *algebrafönster, inmatningsfält* och *koordinataxlar*. Detta gör du i Visa-menyn. Mata in följande funktionsuttryck i *Input*-raden:

```
y = 0.8 x + 3.2
```

Observera att decimaltecknet är en punkt i Geogebra. Kommatecknet används till så mycket annat i Geogebras kommandostruktur att det inte är möjligt att översätta decimaltecknet till ett kommatecken. Geogebra bör svara med följande figur:

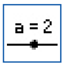


Figur 1: Grafen till $y = 0{,}8x + 3{,}2$.

Pröva nu med att flytta linjen i algebrafönstret med hjälp av piltangenterna. Vilka parametrar kan du påverka på detta sätt? Pröva därefter att flytta linjen i det grafiska fönstret med hjälp av muspekaren. Vilken transformering kan du åstadkomma på detta sätt?

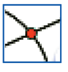
Nu skall vi definiera en rät linje på ett litet annat sätt, och eftersom vi skall använda en hel del verktyg så presenterar jag instruktionerna på ett delvis nytt sätt med bilder för en del kommandon. Gör så här:

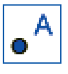
1 Ta bort linjen du konstruerade i exempel 1 genom markering och *Delete*.

2 

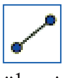
Skapa glidare *k* och *b* med hjälp av verktyget *Glidare* i menyn.

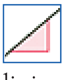
3 Skriv in kommandot: `linje: y=k*x+b` i inmatningsfältet. Glöm inte att skriva in tecknet för multiplikation!

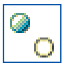
4 
Konstruera skärningspunkten *A* mellan linjen och *y*-axeln. Du kan också använda kommandot `Skärningspunkt [linje, yAxis]`.

5 

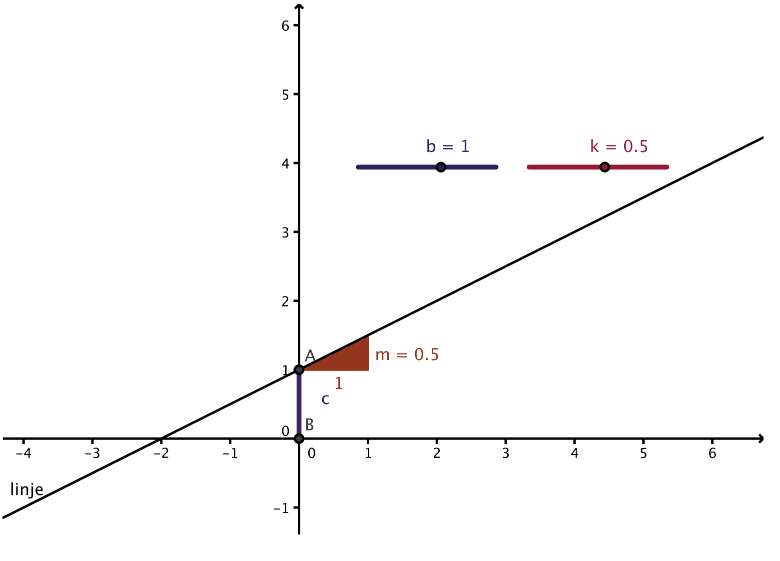
Sätt ut punkt *B* i origo.

6 
Konstruera ett segment mellan punkterna *A* och *B*. Du kanske vill öka tjockleken på segmentet så att det syns bättre ovanpå *y*-axeln.

7 
Använd verktyget *Lutning* (triangel) för att mäta lutningen hos linjen.

8 
Göm onödiga objekt via höger musknapp och avbocka *Visa objekt*.

9 Bättra på utseendet hos konstruktionen genom att använda *Egenskaper*.



Figur 2: Grafen till $y = kx + b$.

Uppgift

Skriv instruktioner för dina studenter som hjälper dem att undersöka hur linjens ekvation påverkas när de ändrar värdet på glidarna.

Förutom polynom, så finns det andra typer av funktioner tillgängliga i Geogebra (exempelvis trigonometriska funktioner, absolutvärden, exponentiella funktioner). Pröva med att rita två räta linjer som skär varandra, konstruera deras skärningspunkt och se hur punktens koordinater förändras när du flyttar på någon av linjerna..

Några av de tillgängliga funktionerna kan väljas från kommandomenyn längst ner till höger i Geogebra. För en komplett lista av tillgängliga funktioner och hur de kan användas, så rekommenderar jag dig att undersöka Geogebras hjälpdokument på adress www.geogebra.org – klicka på Help i vänsterkolumnen.

Exempel 2

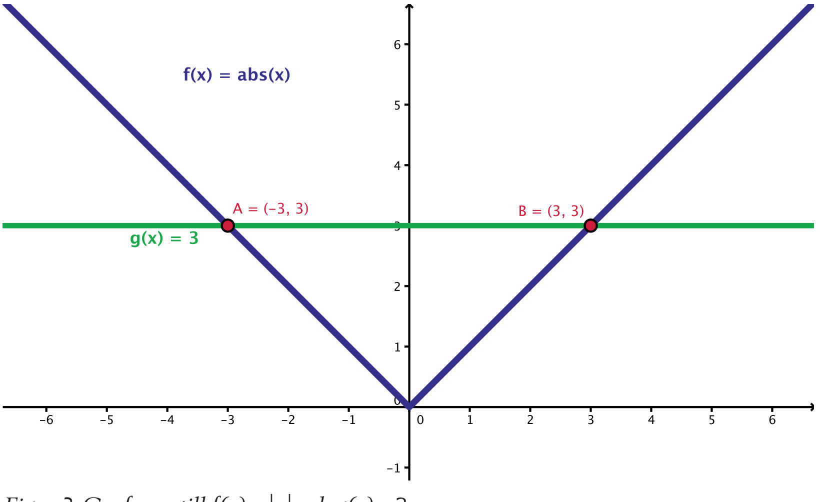
Låt oss undersöka en av de fördefinierade funktionerna i Geogebra, nämligen absolutvärdesfunktionen $f(x) = |x|$. Börja med att öppna en ny Geogebra-fil och välj att visa algebrafönstret, input och koordinat-axlarna.

1 Skriv in `f(x)=abs(x)`

2 Skriv in den konstanta funktionen `g(x)=3`

3 Bestäm skärningspunkten mellan de två funktionerna

Du bör få följande figur. Du kanske vill stänga algebrafönstret och istället visa namn och värden som etiketter för objekten. Klicka på Glidare-symbolen i menyn och välj infoga text. Skriv in `"f(x)="+(f)` så kommer Geogebra att skriva ut $f(x)=\text{abs}(x)$. Det kan också göras genom att välja *Etikett och värde* under *Egenskaper*.



Figur 3: Graferna till $f(x) = |x|$ och $g(x) = 3$.

Det här kan dina elever arbeta med

a Flytta den konstanta funktionen med musmarkören eller piltangenterna. Vad är relationen mellan *y*-koordinaten och *x*-koordinaten hos de två skärningspunkterna?

b Flytta absolutvärdesfunktionen med musmarkören eller piltangenterna. Hur påverkas funktionens ekvation?

c Hur kan den här konstruktionen hjälpa dina elever att bli mer bekanta med begreppet absolutvärde?

Notera: Symmetrin hos denna funktion indikerar att det vanligtvis finns två lösningar till en uppgift med absolutvärden.

Exempel 3

Man kan också undersöka extrempunkter och nollställen eller rötter till ett polynom. Här möter du begreppet *inflexionspunkt*, den punkt där kurvan övergår från att vara konkav till konvex.

1 Skriv in tredjegradspolynomet `f(x)=0.5x³+2x²+0.2x–1`.

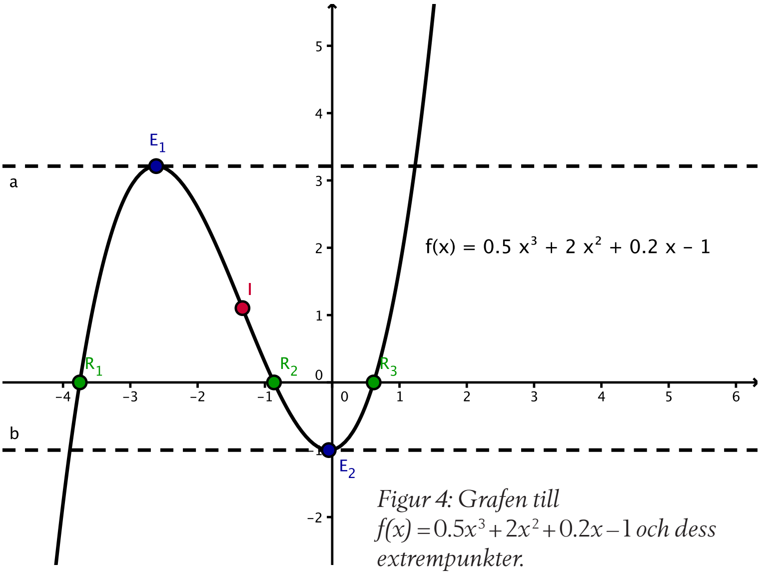
2 Ta fram rötterna till polynomet f genom kommandot: `R=Rot[f]`.
Om det är mer än en rot till ett polynom, så kommer Geogebra att namnge rötterna (t ex R_1, R_2, R_3).

3 Bestäm extrempunkter till polynomet *f*: `E = Extrempunkt[f]`.

4 Konstruera tangenter för *f* i punkterna E_1 and E_2.

5 Bestäm inflexionspunkten till polynomet *f* genom kommandot:
`I = Inflektionspunkt[f]`. Notera att denna felstavning är rättad i nästa version av Geogebra.

Försök att laborera lite med färger och utseende genom att använda egenskaper hos de olika objekten. Be dina elever att ändra algebraiskt på *f*(*x*) och /eller flytta på kurvan med piltangenterna eller muspekaren och se hur detta påverkar extrempunkterna. Vilka extrempunkter går att påverka på dessa olika sätt? Varför?



Figur 4: Grafen till $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$ *och dess extrempunkter.*

Exempel 4

Det finns även inbyggda kommandon för integration och derivering i Geogebra och man kan även rita upp trapetssummor, undersummor och översummor för att illustrera integralkalkylens huvudsats. Så jag avslutar med en sådan figur, snabb och enkel att skapa och lätt att modifiera. Endast några få konstruktionssteg som i korthet är:

1 Ange `f(x) = (x – 2)³ – (x – 1)² – (x – 1) + 3` i inmatningsfältet. Laborera med zoom och flytta kordinasystemet tills du är nöjd.

2 Definiera tre glidare: *a*, *b* och *n*. Låt *a* och *b* glida mellan -5 och 5 med *ökning* = 0,1. Låt *n* glida från 1 till 100 med ökning = 1. Ställ *a* på 1, *b* på 2 och *n* på 10.

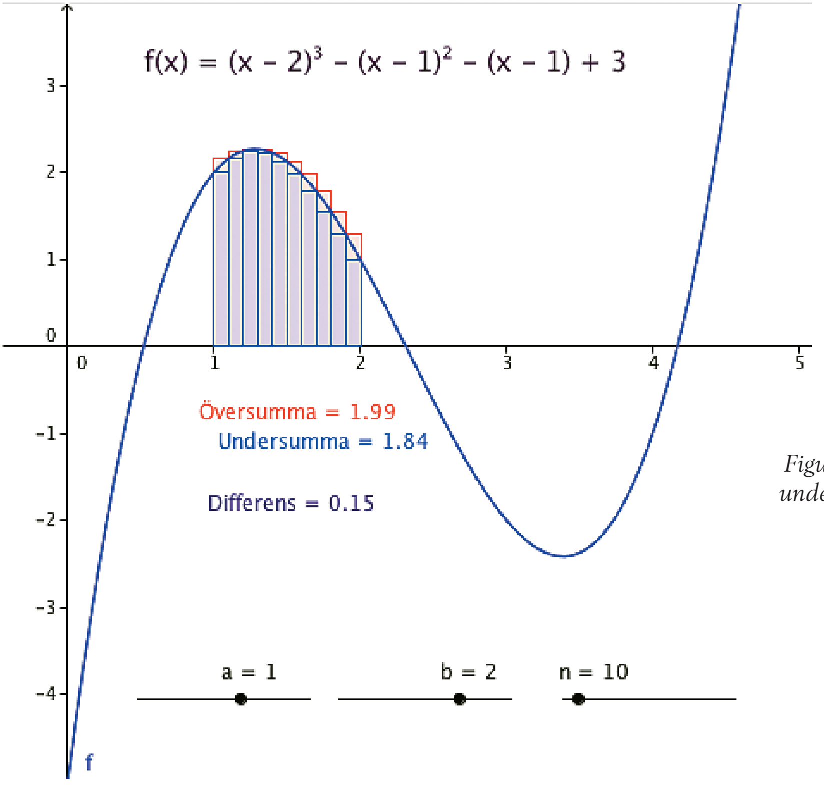
3 Skriv nu `Undersumma[f, a, b, n)` och `Översumma[f, a, b, n]` i inmatningsfältet.

4 Skriv in `Differens=Översumma-Undersumma` i inmatningsfältet.

5 Högerklicka och välj *Visa Objekt* på Översumma och Undersumma.

6 Gå till menyalternativet med glidare och välj *Infoga text*. Klicka där du vill ha din text.

7 Skriv in texten `"f(x) ="+(f)` och högerklicka därefter på texten och välj egenskaper. Där kan du förändra storlek och färg. Observera att denna ”etikett” räknas om och förändras om du flyttar på kurvan. Om du eller dina elever minskar på värdet för *n*, så syns under- och översummorna bättre och differensen ökar.



Figur 5: Översumma och undersumma till f(x) med n staplar från a till b.

Låt gärna dina elever arbeta med beräkning av välkända integraler från sina läroböcker och jämföra resultatet från under- och översummor i Geogebra. Hela konstruktionen finns kvar ifall du eller dina elever omdefinierar $f(x)$, men ni kan behöva omdefiniera a, b eller n. Det gör ni lätt genom att högerklicka på glidaren och ändra gränser eller ökning.

För att hjälpa dina elever att förstå det svåra integralbegreppet kan det även vara fördelaktigt att låta dem flytta eller omdefiniera $f(x)$ så att den uppmätta summan av staplarna blir negativ och därigenom få till stånd en diskussion om skillnaden mellan integralbegrepp och fysisk area.

Det finns många fler funktioner som är användbara i Geogebra, speciellt i den kommande version 3.2: Taylorpolynom, Matrishantering, Komplexa tal, Summering med flera. Jag hoppas att jag kan återkomma till exempel på hur man kan använda dessa kommandon i undervisningen i en framtida artikel.

LITTERATUR

Lingefjärd, T. (2008). Samspelet mellan algebra och geometri. *Nämnaren*, (35)4, s 28 – 31.

Lingefjärd, T. (2009). Geogebra – för de yngre. *Nämnaren*, (36)1, s 35 -39.