

Två tänkbara modeller för undervisning om negativa tal

Förra numrets artikel om negativa tal följs upp här. Två modeller för addition och subtraktion av positiva och negativa tal presenteras, båda utprovade i klassrummet. Utgående från dessa modeller går det även att diskutera multiplikation och division av negativa tal.

Det råder i undervisning och i läroböcker viss förvirring kring begreppet negativa tal, något som påpekades i den inledande artikeln i förra numret av Nämnaren. Där visas tre olika betydelser för minustecknet vilka ofta kan blandas ihop på ett för elevernas kunskapsbildning ogynnsamt sätt:

1. Minustecknet anger operationen subtraktion, exempelvis $5 - 3$.
2. Minustecknet anger att ett tal är negativt, exempelvis (-6) .
3. Minustecknet anger motsatt tal, $(-a)$ är motsatt tal till a , oberoende av om a är positivt eller negativt.

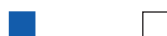
I det följande presenteras två olika förslag till modeller vars syfte är att den studerande ska kunna se och förstå hur räkneregler för addition och subtraktion med positiva och negativa tal kan definieras. Mot slutet kommer även en del om multiplikation och division att behandlas. Observera att negativa tal i artikeln alltid skrivs inom parentes och positiva tal utan parentes.

Modell 1

För att visa subtraktion och addition där både positiva och negativa tal förekommer

använder vi oss av *föremål* för att åskådliggöra positiva och negativa tal. Här använder vi kuber av två olika färger, blå och vita. Vilka föremål eller färger som används är inte viktigt, bara man håller reda på vad föremålen och de olika färgerna representerar.

Vi tilldelar en blå kub värdet 1 och en vit kub värdet (-1) .



Tre blå kuber får då tillsammans värdet 3 och tre vita kuber har tillsammans värdet (-3) .



En kub av vardera färg har tillsammans värdet noll och kan således illustrera motsatta tal.



Fyra kuber av vardera färg har på samma sätt tillsammans värdet noll.



Addition

Vid addition lägger vi så många kuber av vardera färg som beräkningen kräver i en gemensam hög och får då resultatet av additionen. Här tar vi hänsyn till att motsatta tal tillsammans har värdet noll. Alla additioner kan utföras på samma sätt. Några exempel:

$$3 + 2$$



lägg ihop



ger summan 5

$$(-5) + 3$$



lägg ihop



kuberna i rutan har värdet $(-3) + 3 = 0$



summan blir (-2)

$$(-2) + (-3)$$



lägg ihop



ger summan (-5)

Subtraktion

Principen för arbete med subtraktion $a - b$ i modell 1 är att vi alltid startar med att räkna upp antalet kuber a . Färgen anger om talet är positivt eller negativt. Från antalet a ska vi nu ta bort antalet b av *samma färg* som a . När detta är möjligt visar återstående kuber resultatet av subtraktionen.

$$(-5) - (-3) = (-2)$$



Inskjuten nolla

När det inte är möjligt att ta bort kuber av samma färg, exempelvis vid subtraktionen $(-2) - (-5)$, måste vi göra en komplettering av antalet kuber så att subtraktionen blir möjlig att genomföra. Vi startar med två vita kuber som illustrerar talet (-2) .



För att kunna subtrahera talet (-5) är en komplettering nödvändig så att vi kan ta bort fem vita kuber. Vi adderar talet noll genom att lägga till tre vita och tre blå kuber.



Vi förändrar inte värdet på detta sätt eftersom vi lägger till *noll*, $(-2) + 0 = (-2)$. Nu kan vi subtrahera talet (-5) genom att ta bort fem vita kuber. Värdet av återstoden visar sig vara 3.

Med samma metod kan vi utföra subtraktionen $5 - (-2)$. Vi lägger först upp fem blå kuber.



I detta läge kan vi inte ta bort två vita kuber. Vi lägger till två blå och två vita kuber, som tillsammans har värdet noll.



Antalet kuber i figuren har fortfarande värdet fem. Nu kan vi dra bort två vita kuber och får resultatet $5 - (-2) = 7$.



Att på detta sätt addera talet noll kallas ibland *metoden med inskjuten nolla*. Tänk på att göra ett klokt val av antalet inskjutna vita och blå kuber. Här är några lämpliga exempel på beräkningar att använda för att bekanta sig vidare med denna modell:

$$12 - 6$$

$$12 - (-6)$$

$$(-12) - 6$$

$$(-12) - (-6)$$

$$6 - 12$$

$$6 - (-12)$$

$$(-6) - 12$$

$$(-6) - (-12)$$

Sammanfattning modell 1

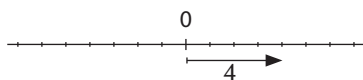
Avsikten är att lärare och elever tillsammans ska kunna *komma fram till de räkneregler* som gäller för addition och subtraktion med både positiva och negativa tal. Bland exemplen bör för varje addition finnas en motsvarande subtraktion som ger samma resultat. Modellen visar att:

- ◇ Addition av ett negativt tal ger samma resultat som subtraktion av det motsatta talet.
- ◇ Subtraktion av ett negativt tal ger samma resultat som addition av det motsatta talet.

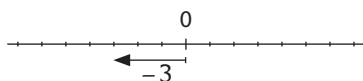
Modell 2

I den andra modellen för arbete med addition och subtraktion där både positiva och negativa tal förekommer, använder vi oss av *talaxeln och pilar*. Vi börjar med att göra några definitioner:

- ◇ Positiva tal ritas som pilar med spetsen åt höger. Pilens längd och riktning visar talets storlek.

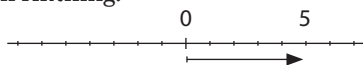


- ◇ Negativa tal ritas som pilar med spetsen åt vänster. Pilens längd och riktning visar talets storlek.

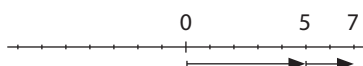


Addition

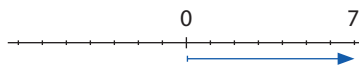
Vid addition av två tal startar vi i denna modell alltid på noll. Ex $5 + 2$. Från noll ritas en pil som representerar första talet med längd och riktning.



Spetsen avslutar pilen, här för talet 5. Från första talets pilspets fortsätter vi med en pil för det andra talet 2.

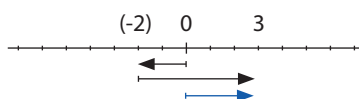


Resultatet av additionen $5 + 2$ kan nu avläsas på två sätt. Dels som koordinaten för andra talets pilspets, dels som en tredje summapil, ritad från noll till spetsen av den andra pilen.

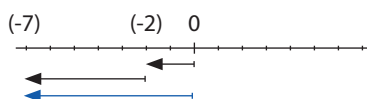


Här är två exempel som illustrerar metoden:

$$(-2) + 5 = 3$$



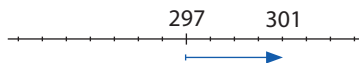
$$(-2) + (-5) = (-7)$$



Subtraktion

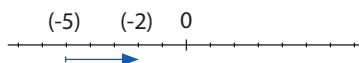
Vid subtraktion använder vi en speciell subtraktionsmetod som ibland kallas *metoden med addenden*. Vi använder oss fortfarande av tallinjen och pilar. Här följer en kort beskrivning av denna metod.

Vid beräkning av subtraktionen $301 - 297$ i huvudet, kan vi utföra den genom att räkna upp från 297 till 301. Detta kan vi åskådliggöra på en talaxel genom att starta på 297 och rita en pil till 301. Pilens längd och riktning ger då svaret 4.

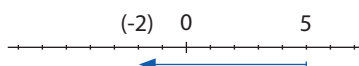


I den här modellen utför vi *alla* subtraktioner $a - b$ på detta sätt. Vi sätter pennan på talet b på talaxeln och drar en pil till talet a . Pilens längd och riktning ger svaret på subtraktionen, exempelvis:

$$(-2) - (-5) = 3$$



$$(-2) - 5 = (-7)$$



Av ovanstående två exempel ser vi att additionen $(-2) + 5$ ger samma resultat som subtraktionen $(-2) - (-5)$ samt att additionen $(-2) + (-5)$ ger samma resultat som subtraktionen $(-2) - 5$.

Sammanfattning modell 2

Vi kan nu i undervisningssituationen göra motsvarande sammanfattning som den som gjordes i modell 1. Användaren avgör själv vilken metod som är den mest tilltalande. Det kan vara en tillgång att kunna visa samma beräkningar på två olika sätt. För att även bekanta sig med modell 2 är det värdefullt att eleverna genomför några beräkningar, se modell 1, med lämpliga exempel.

Multiplikation

Vid undervisning om multiplikation där negativa tal förekommer håller vi oss till resonemang som delvis är uppbyggda på resultaten från de föregående modellerna.

Vid multiplikation av två tal där första faktorn är positiv och den andra negativ kan vi återföra resultatet till addition av negativa tal. Multiplikation ses då som en upprepad addition. Exempel:

$$3 \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) = (-6)$$



Flera liknande exempel visar att när första faktorn är positiv och den andra negativ blir produkten ett negativt tal.

Tänk på att samma räkneregler ska gälla när vi räknar med negativa tal som vid beräkningar med enbart positiva tal. För positiva tal gäller kommutativa lagen vid multiplikation, $a \cdot b = b \cdot a$. Eftersom vi vid multiplikation av två tal där den första faktorn är negativ och den andra positiv *inte* kan återföra den på upprepad addition, hänvisar vi till att kommutativa lagen för multiplikation ska gälla. Exempelvis ska $(-2) \cdot 3$ ge samma resultat som $3 \cdot (-2)$.

Produkten av två tal där ena faktorn är positiv och andra faktorn negativ blir ett negativt tal.

Vid multiplikation av två negativa tal resonerar vi utgående ifrån distributiva lagen för multiplikation. När talet noll finns med som en faktor blir produkten noll, exempelvis $(-3) \cdot 0 = 0$

Vi ersätter nu faktorn noll med summan av två motsatta tal. Från arbetet med kuberna i modell 1 har vi nu erfarenhet av hur en så kallad "inskjuten nolla" kan skapa nya möjligheter. Möjligheterna att illustrera multiplikation med kuberna är dock begränsad.

$$\begin{aligned} (-3) \cdot 0 &= 0 \\ (-3) \cdot (5 + (-5)) &= 0 \end{aligned}$$

Distributiva lagen ger nu

$$\begin{aligned} (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) &= 0 \\ (-15) + (-3) \cdot (-5) &= 0 \end{aligned}$$

Detta medför att $(-3) \cdot (-5)$ måste ha samma värde som det motsatta talet till (-15) dvs 15, för att summan ska vara noll. Exemplet kan utföras med vilka tal som helst och till sist generaliseras. En produkt där båda faktorerna är negativa tal är alltid ett positivt tal, och resultatet kan skrivas på generell form med bokstavssymboler.

Division med hela tal

Vi kan se division som omvändningen till multiplikation. Därav följer att vi inte behöver göra speciella tillägg för att hantera division där negativa tal förekommer. Samma regler gäller som vid motsvarande multiplikation.

$$12/3 = 4 \quad \text{för att} \quad 3 \cdot 4 = 12$$

$$(-12)/3 = (-4) \quad \text{för att} \quad 3 \cdot (-4) = (-12)$$

$$(-12)/(-3) = 4 \quad \text{för att} \quad (-3) \cdot 4 = (-12)$$

$$12/(-3) = (-4) \quad \text{för att} \quad (-3) \cdot (-4) = 12$$

Den här beskrivna undervisningsnivån med exempel har visat sig fungera i matematikundervisningen i både grundskolan och gymnasieskolan.