MARIE KUBÍNOVÁ & NAĎA STEHLÍKOVÁ

Matematikprojekt i Tjeckien

Vi räknar som de gamla egyptierna

I denna artikel beskrivs projektarbete som ett sätt att förändra matematikundervisningen. Två projekt används för att illustrera konstruktivistiska angreppssätt i undervisningen. Här publiceras det första, *Vi räknar som de gamla egyptierna*, som rör bråk och aritmetiska operationer med dessa. Det kan användas både på grundskole- och gymnasienivå. Det andra, *Begränsad aritmetik*, kommer att publiceras i kommande nummer av Nämnaren och kan användas på gymnasienivå för elever som är intresserade av matematik samt som en brygga mellan elementär och abstrakt matematik för universitetsstudenter.

Under nittiotalet har forskning i matematikdidaktik (inte endast) i Tjeckien beaktat konstruktivistiska angreppssätt som gradvis har funnit sin väg in i matematikundervisningen i grund- och gymnasieskolan. (Hejný, Kuřina, 2001; Jaworski, 1994.) Vi vill här beskriva våra positiva erfarenheter av att använda projektarbete som ett sätt att främja dessa angreppssätt.

Låt oss först förtydliga vad vi menar med konstruktivistiska angreppssätt. För våra ändamål skiljer vi mellan två motsatta förhållningssätt i matematikundervisningen.

Marie Kubínová *är lärare i grundskola samt lärarutbildare vid Charles University i Prague, Faculty of Education.*
Naďa Stehlíková *är lärarutbildare vid Charles University i Prague, Faculty of Education.* Nada.Stehlikova@pedf.cuni.cz

Det första kallar vi förmedlande (transmissivt). Här är det huvudsakliga målet vanligen att överföra så mycket information som möjligt till eleverna och göra det möjligt för dem att lyckas i olika sorts tester. Man använder typiska matematikproblem, och man presenterar de vanligaste ”knepen”. Innehållet presenteras ofta i form av formler, teorem, algoritmer och regler. Eleverna förväntas inte arbeta självständigt, experimentera, leta efter strategier eller föreslå egna matematiska problem. Detta undervisningssätt motiveras ofta delvis av kursplanens krav och av lärarnas egna erfarenheter.

I den andra änden av spektrat återfinns de konstruktivistiska förhållningssätten. Undervisningsprocessens centrum är inte ämnesinnehållet som sådant, utan utvecklandet av elevens personlighet och kompetenser. Huvudsyftet är att främja hans/hennes kognitiva och metakognitiva växande. Eleverna förses inte med färdiga produkter utan tillägnar sig sätt att själva konstruera kunskap baserad på sin egen erfarenhet. De får större frihet att välja sin egen inlärningsprocess. Läraren är inte huvudauktoritet utan får rollen som handledare (Littler, Koman, 1998) som leder sina elever mot ett aktivt förhållningssätt till det egna lärandet. Han/hon skapar lärandesituationer där eleven känner ett behov att upptäcka ett okänt begrepp, att få veta någonting nytt och få tillräckligt utrymme för att utveckla sina egna inlärningsstrategier.

Påpekas bör att situationen i klassrumsverkligheten sällan är "svart" eller "vit", utan någonstans mellan de ovan beskrivna förhållningssätten.

Projektarbete i matematik

Ordet projekt används i många olika betydelser. Hellre än att försöka ge det en exakt definition vill vi karaktärisera de inslag som vi anser vara de viktigaste:

Ett elevprojekt

- är en del av det ämnesinnehåll som eleven förväntas behärska,
- karaktäriseras av inlärningsprocessens öppenhet,
- är upplagt så att inlärningsgången inte är given i förväg, så att eleverna inte går igenom ett styrt program,
- utgår från och genomförs på basis av elevens eget ansvar,
- har ofta koppling till världen utanför skolan och grundar sig på elevens egna erfarenheter,
- leder till konkreta resultat av materiellt slag (t ex en ritning av drömhuset) eller mentalt slag (t ex upptäckten av en matematisk lag, en lista på ett föremåls egenskaper, en lista med elevens egna matematiska problem mm).

Vi vill skilja mellan två olika typer av projekt, *ämnesövergripande* och (rent) *matematiska*.

Ett ämnesövergripande projekt inbegriper ett eller flera skolämnen och/eller kunskap om verkligheten. Det används dock främst på matematiklektioner och matematik är dess främsta fokus. Sådana projekt är ganska vanliga i många länder (dock inte i Tjeckien).

Ett (rent) matematikprojekt är inommatematiskt och har ingen koppling till omvärlden eller till andra ämnen. Det måste dock involvera matematik på en tillämplig nivå. Eleverna uppmanas att utföra experiment, att formulera och pröva enkla hypoteser och att genomföra abstrakta resonemang.

Vi tror att matematikprojekt tillgodoser de intellektuella behoven hos elever, oavsett ålder. Dessutom kan de få erfarenhet av åtminstone en liten del av riktiga matematikers arbete.

Marie började använda projekt i sin undervisning i grundskolan för över 10 år sedan, och hennes erfarenhet visar att projektarbete är ett bra sätt att främja ett konstruktivistiskt angreppssätt. Vi kommer att illustrera resonemangen ovan genom att beskriva hur två matematikprojekt genomfördes i klassrummet.

För närmare detaljer se Kubínová, 2002a, 2002b; Stehlíková, 2002.

Räkna som de gamla egyptierna

Rhind-papyrusen – en gammal egyptisk handskrift med matematiska tabeller och problem. Detta omfattande dokument från det gamla Egypten har varit en källa för mycket information om egyptisk matematik. Papyrusen köptes 1858 i en semesterort vid Nilen av en skotsk antikvarie, Alexander Henry Rhind, därav namnet. Mer sällan kallas den Ahmes-papyrusen till minne av den skrivare som kopierade den cirka 1650 e kr.

(Encyklopedia Britannica 2003, red:s översättning)

Temat för detta projekt var matematikens historia. Marie utvecklade en serie projekt som var inriktade på olika civilisationer: *Vi räknar som de gamla babylonierna* – olika talsystem, mätningar, *Vi räknar som de gamla kineserna* – introduktionen av negativa tal, *Vi räknar som de gamla indierna* – egenskaper hos talet noll och *Vi räknar som de gamla grekerna* – irrationella tal, geometriska serier.

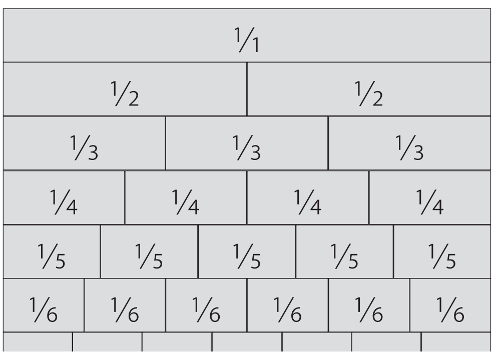
Projektet *Vi räknar som de gamla egyptierna* rörde bråk och genomfördes med 12-åriga elever. Dess syfte var att få eleverna att upptäcka:

- metoden att hitta ekvivalenta bråk genom att samtidigt multiplicera bråkets täljare och nämnare med ett naturligt tal n,
- metoden att förkorta bråket så långt som möjligt,
- algoritmen för att addera och subtrahera bråk genom att först göra om dem till bråk med samma nämnare.

Dessa färdigheter lärs ofta in genom att läraren förevisar och eleverna uppmanas att drilla dem genom övningar.

Nästa syfte gällde utvecklandet av generella kompetenser som allmänt anses höra samman med matematiskt arbete: Förmågan att bestämma en strategi, att organisera sitt eget arbete, att finna lämpliga system så att inget utelämnas och att söka efter mönster för att underlätta det egna arbetet.

Elevernas förkunskaper var att bråket är en del av det hela samt att kunna hantera addition och subtraktion av bråk med samma nämnare (genom att använda t ex tårtmodellen). De hade tillgång till en så kallad bråkmur där de kunde finna likvärdiga bråk.



Projektet omfattade två matematiklektioner och innehöll också en del hemarbete. Lektionen började med en diskussion om Rhind-papyrusen och sättet de gamla egyptierna räknade med bråk.

Eleverna fick veta att bråk med täljaren 1 kallas stambråk och att de gamla egyptierna räknade med dem. Den första uppgiften löd:

> Dela upp $\frac{4}{5}$ i summan av stambråk.

Deras första reaktion var naturligtvis

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\,.$$

Därefter specificerade lärarna reglerna ytterligare genom att säga att stambråken i summan måste vara olika. Efter ett tag kom några barn fram till detta förslag:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{1}{10}+\frac{7}{10}=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=\ldots$$

Detta ledde inte till det korrekta svaret, så därför började de om igen:

$$\frac{4}{5}=\frac{8}{10}=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}.$$

Vid det här laget var eleverna mycket ivriga att påbörja fortsatta undersökningar. De delades in i grupper om 4 (läraren lät dem bilda grupper som de själva ville) och fick följande uppgift:

> Dela upp alla bråk från $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$ upp till $\frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}$, och $\frac{9}{9}$ i summan av stambråk med olika nämnare.

Inga ytterligare instruktioner gavs. Eleverna fick själva hitta effektiva sätt att fördela arbetet inom gruppen, hitta en strategi eller strategier för att hitta summorna och ett sätt att redovisa sina resultat.

Medan grupperna arbetade fungerade läraren som rådgivare om det fanns behov av det, i övrigt blandade hon sig inte i barnens arbete. De fick självständigt fatta beslut om vilken strategi de skulle tillämpa och på vilket sätt de skulle kontrollera sina lösningar. Efter två lektioner presenterade grupperna sina resultat inför klassen. Det bör betonas att presentation av elevernas resultat är en omistlig del av projektarbetet. Ett skäl till det är att det vore orealistiskt att förvänta sig att alla elever självständigt kan nå projektmålet och att deras arbete skulle vara utan fel. Genom att presentera resultatet av sitt arbete för andra kan de dock lära av varandra och tillägna sig kunskap som byggts upp av kamraterna.

Att motivationen för projektet *Vi räknar som de gamla egyptierna* var mycket stark illustreras bäst av vad som hände efter lektionerna. Utan att vara ombedda att göra det undersökte några elever hemma andra bråk med nämnare större än 9 och letade efter andra strategier för att lösa uppgiften och andra sätt att organisera sina resultat.

Det är omöjligt för oss att presentera i detalj vad som hände i klassrummet. Vi väljer i stället den viktigaste kunskapen som eleverna fick genom projektarbetet, och visar hur den byggdes upp, genom utdrag från arbetet i olika grupper.

Eleverna utvecklade gradvis följande strategi för att bestämma talen: De förlängde täljare och nämnare med 2 och försökte bryta ner det till summan av två olika bråk. Om detta inte ledde till rätt svar förlängde de det ursprungliga bråkets täljare och nämnare med 3 och upprepade proceduren, och så vidare tills de kom fram till lösningen.

Förkortning och förlängning av bråk

Eleverna arbetade med uppgiften att skriva två tredjedelar som summan av stambråk, och följande diskussion fördes:

L – lärare, P_1, P_2 – två pojkar, F – en flicka

P_1: *Vi borde antagligen ta mindre bråk …*
P_2: *Men bara de som vi klarar.*
L: *Vad menar du Paul?*
P_2: *Så att vi kan lägga ihop dem utan att det blir något över. Från en tredjedel kan jag få en sjättedel genom att halvera, men jag kan inte få en fjärdedel eller en femtedel så här.*
F: *I stället för tredjedelar kan vi ta sjättedelar.*
Skriver på tavlan: $2/3 = 4/6 \longrightarrow 3/6 + 1/6$
Jag multiplicerar det med 2 och jag kan inte dela det i 2 och 2 sjättedelar för då skulle jag få samma sak igen. Så jag måste ta tre sjättedelar och en sjättedel eller också … (tvekar) *… nej,* (tvekar) *det blir samma.*
P_2: *Just det! Tre sjättedelar är en halv. Titta på tårtan.*
L: *Eve, kan du vara snäll och korrigera lösningen på tavlan.*
F: Suddar ut tidigare resultat och skriver
$2/3 = 4/6 = 3/6 + 1/6 = 1/2 + 1/6$
Jag skrev två tredjedelar med hjälp av (tvekar) *stambråk.*

Utveckla algoritm för bråkaddition

Strategin att ”förlänga bråket” för att hitta summorna ledde till utvecklandet av algoritmen för addition av bråk. En av grupperna förklarade till exempel sitt tänkande så här:

Vi hade $1/4 + 1/28$ *och vi ville veta om summan är två sjundedelar, så vi förlängde det första bråket med sju.*
Skriver:

$$1/4 + 1/28 = 7/7{\times}4 + 1/28 = 7/28 + 1/28 = 8/28$$

och sedan förkortade vi det med 4.
Skriver $8/28 = 2/7$.
Så fick vi två sjundedelar.

Koppling mellan bråk och decimaltal

En pojke, Dan, arbetade med projektet hemma, och nästa dag, efter uppmuntran från läraren, utmanade han sina klasskamrater genom att säga att vilket bråktal de än gav honom skulle han kunna dela upp det i summan av stambråk. En flicka ropade: *Sex sjuttondelar.*

D *Ja, först ska jag dividera det med räknaren, och i min tabell* (se nedan) *hittar jag det första lilla talet.*

1/2	0,5	1/16	0,0625	1/30	0,033333333	1/50	0,02
1/3	0,333333333	1/17	0,058823529	1/31	0,032258064	1/51	0,019607843
1/4	0,25	1/18	0,055555555	…	…	1/52	0,019230769
1/5	0,2	1/19	0,052631578	1/38	0,026315789	1/53	0,018867924
1/6	0,166666666	…	…	1/39	0,025641025	1/54	0,018518518
1/7	0,142857142	1/26	0,038461538	1/40	0,025	1/55	0,018181818
…	…	1/27	0,037037037	1/42	0,024390243	…	…
1/14	0,071428571	1/28	0,035714285	1/42	0,023809523		
1/15	0,066666666	1/29	0,034482758	1/43	0,023255813		

Skriver:

$6/17 = 0{,}352941176 > 0{,}333333333 = 1/3$.

Jag subtraherar talen och då har jag det. Det var lätt den här gången.

Skriver: $6/17 - 1/3 = (18 - 17)/51 = 1/51$.

Efter lärarens påpekande skriver han

$6/17 = 1/3 + 1/51$.

Därefter bad läraren en av eleverna att komma fram till tavlan och kontrollera detta resultat genom att addera bråken (för att se om eleverna förstod denna algoritm). Händelseförloppet fortsatte:

L: *Dan, skulle du kunna göra åtta sjuttondedelar?*

D: Tittar i sin tabell och skriver:

$8/17 = 0{,}470588235 > 0{,}333333333 = 1/3$,

$8/17 - 1/3 = (24 - 17)/51 = 7/51$.

Det här bråket är inte ett stambråk, så vi måste göra om det. Jag dividerar igen och hittar ett mindre tal.

Skriver:

$7/51 = 0{,}137254902 > 0{,}125 = 1/8$;

$7/51 - 1/8 = (56 - 51)/408 = 5/408$,

$5/408 = 0{,}012254901$.

Men jag har inget så litet tal i min tabell, så jag måste gissa.

Skriver: $0{,}0125 = 1/80$

En åttiondedel är för stort.

Skriver: $0{,}0212345679 = 1/81$.

Ett genom åttioett är också för stort.

Genom sådana gradvisa gissningar kommer han fram till det korrekta svaret:

$$1/3 + 1/8 + 1/82 + 1/16728 = 8/17.$$

Denna oförutsedda situation skapade en fantastisk möjlighet för eleverna att utveckla och öva på omvandlingar mellan bråk och decimaltal och att ordna decimaltal. Eleverna blev också intresserade av att en del bråk kan skrivas ”kort” och andra ”långt” Det senare ledde till upptäckten att det finns två sorters rationella tal – periodiska och övriga.

Att hitta lämpliga sätt att presentera resultat och söka efter mönster

Eleverna hittade på olika slags tabeller för att bokföra sina resultat (se tabell nedan) Upptäckten av ett lämpligt sätt att presentera summorna var mycket viktig för upptäckten av olika mönster som kunde underlätta arbetet. Om de visste att:

$$7/9 = 1/2 + 1/4 + 1/36$$

kunde de omedelbart skriva att

$$8/9 = 1/2 + 1/4 + 1/36 + 1/9.$$

$1/2$	
$1/3$	
$2/3$	$1/2+1/6$
$1/4$	
$2/4$	$1/2$
$3/4$	$1/2+1/4$
$1/5$	
$2/5$	$1/3+1/15$
$3/5$	$1/3+1/5+1/15$ $\quad 1/2+1/10$
$4/5$	$1/2+1/4+1/20$ $\quad 1/2+1/5+1/10$
$1/11$	
$2/11$	$1/6+1/66$
$3/11$	$1/4+1/44$
$4/11$	$1/3+1/33$
$5/11$	$1/3+1/11+1/33$
$6/11$	$1/2+1/22$
$7/11$	$1/2+1/11+1/22$
$8/11$	$1/2+1/6+1/22+1/66$
$9/11$	$1/2+1/4+1/22+1/44$
$10/11$	$1/2+1/3+1/22+1/33$

Övning på algoritmer

Eleverna upptäckte inte endast algoritmen för att addera bråk utan fick också omfattande färdighetsträning på detta. Bråktabellerna och dess nedbrytningar i stambråk utgör projektets slutprodukt, men för att kunna fylla i den måste eleverna utföra en mängd beräkningar för att hitta summorna och kontrollera resultaten. De skulle ha tyckt att en sådan aktivitet varit oerhört trist om de bara blivit ombedda att beräkna kolumner av summor.

Slutsatser

Sammanfattningvis vill vi betona en princip som vi menar är kärnan i ett konstruktivistiskt förhållningssätt till matematikundervisning. Ny kunskap byggs upp när eleven behöver den. Algoritmen för addition av bråktal gavs inte till barnen som en färdig produkt, eleverna själva behövde den för att kunna lösa uppgiften. Den var dold i uppgiften, utan att läraren kom till klassrummet och sa: *Barn, idag ska vi lära oss att addera bråk.*

LITTERATUR

Hejný, M., Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Jaworski, B. (1994). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry.* London: The Falmer Press.

Kubínová, M. (2002a). *Projekty ve vyučování matematice, cesta k tvořivosti a samostatnosti.* Praha: PedF UK.

Kubínová, M. (2002b). Projects as an Educational Strategy. In Bergsten, Ch. (ed.), *Proceedings of MADIF 3.* (s. 143 – 150). Norrköping: Linköpings Universitet.

Kubínová, M., Stehlíková, N. (2002). Pupils' Project in School Mathematics. In, *Empowering Mathematics Teachers for the Improvement of School Mathematics* (s. 207 – 256). Prague: The EMTISM Partnership.

Littler, G.H., Koman, M. (1998). Challenging Activities for Students and Teachers. In Novotná, J., Hejný, M. (Eds), *Proceedings of SEMT01* (s. 113 – 118). Prague: PedF UK.

Stehlíková, N. (2003). Building a Finite Arithmetic Structure: Interpretation in Terms of Abstraction in Context. In, *European Research in Mathematics Education – Proceedings of CERME3.* In print.

Stehlíková, N. & Jirotková, D. (2002). Building a Finite Algebraic Structure. In Novotna, J. (Ed.), *European Research in Mathematics Education – Proceedings of CERME2,* vol. 1, (s. 101 – 111). Prague: PedF UK.

Artikeln baseras delvis på resultat från forskningsprojekten GACR 406/02/0829 och GAUK 500/2004/APP/PedF.