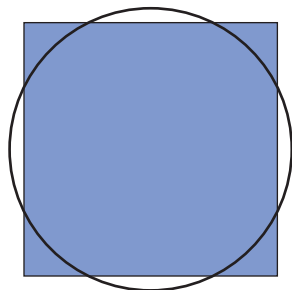
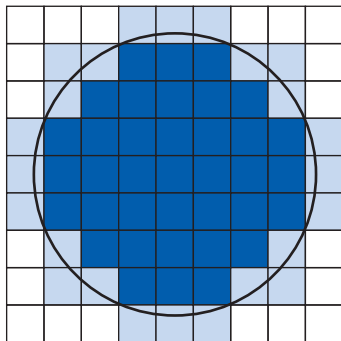


Konsten att mäta area

– från förskola till gymnasium

Har du tänkt på att vi, förutom att vi använder enheten tum, anger bildskärmens area som längden på dess diagonal? På ett liknande sätt mätte grekiska antikens matematiker area genom att ange kantlängden på en kvadrat med samma area som den givna ytan. Enheter som kvadratmeter och för den delen även kvadrattum är faktiskt sentida uppfinningar. Låt oss se vad areabegreppets idéhistoria kan berätta! Vi upptäcker att de olika synsätten "area som antalet enhetskvadrater som tessellerar ytan" respektive "area som kantlängd på en kvadrat med samma area som ytan" ger oss *tesselleringsgeometri* respektive *konstruktionsgeometri*, vilka är två ganska olika men kompletterande verktyg för att bestämma area. Dessa båda verktyg fungerar också för att bestämma volym även om denna artikel begränsar sig till area.



Geometrisk mättenheter genom historien

Bland allmogon var historiska enheter för längd ofta direkt definierade genom kroppsått. Exempel på detta är *tum*, *kvarter* som är en kvarts aln och motsvarar en *handsbredd* samt *fot* och *famn* liksom även antal steg, där 1 *mile* innebär tusen dubbelsteg. Det finns också ett antal indirekta längdmått baserade på exempelvis tid (*rasthåll* = ca 5 km) och akustiska mått (*rop* = så långt man kan höras under tysta förhållanden). Volymmått var också oftast direkta och baserades vanligen på något kärl som *skäppa*, *kappe* eller *tunna*. Till skillnad från historiska mått för längd och volym, var ytmått oftast indirekta och baserade på volym, tid och försörjning. Ytmått utgick ifrån hur många volymenheter utsäde som behövdes för att beså ett land (*skäppland*, *kappland*, *tunnland*). Ytmått bestämdes även genom tid, nämligen den yta man kunde bearbeta på ett dagsverke. Areamåtten *mansslätt* och *plogland* motsvarar arean som under ett dagsverke kunde slås med lie respektive plogas. Ytterligare sätt att mäta area var avkastning som grund för skatteunderlag eller familjeförsörjning – en gård stor nog att försörja en familj på. Även om den svenska matematikern Georg Stiernhielm utarbetade ett decimalsystem med tillhörande kvadratlängder och kubiklängder redan under 1600-talet, så blev detta sätt att mäta yta som kvadratlängd inte spritt förrän lantmätarna fick uppdraget att genomföra skiftena (storskiftet ca 1750 och laga skiftet 1827). En tolkning är därför att det krävdes en matematiskt utbildad yrkeskår verksam ute bland folket, nämligen lantmätarna, för att sprida detta nya måttssystem.

Ytterligare en aspekt är att de gamla måttsystemen var adderande då man helt enkelt räknade efter hur många tunnor utsäde man behövde till sina åkrar. Att istället multiplicera längd med bredd krävde kunskaper i multiplikation, vilket i sin tur krävde att det fanns en skola med matematikundervisning att skicka barnen till. Vi lämnar därför allmogens måttsystem och går vidare till att jämföra de två matematiska synsätten på area, konstruktionsgeometri och tesselleringsgeometri, och hur dessa används i skolgeometrin.

Två definitioner av area

Beteckningen *kvadratur* syftar på att antikens grekiska matematiker mätte area på följande sätt.

1. Givet en geometrisk yta, konstruera geometriskt om den till en kvadrat med lika stor area.
2. Mät sedan kantlängden hos denna kvadrat.

En modern definition av area är begreppet minimal övertäckning, vilket definieras som följer:

1. Välj någon enhetsyta. En enhetsyta kan vara allt från björklöv till kvadrater med sidan 1 längdenhet.
2. Lägg nu dessa enhetsytor enligt följande regler:
 - (a) De måste täcka din yta helt och (b) du ska lägga dem på så sätt att så få enhetsytor som möjligt behövs.

Areatraditionen kvadratur krävde att alla figurer konstruerades om till kvadrater och detta ledde till intensiv utveckling av konstruktionsgeometrin. Kvadratur kom senare att även omfatta area mellan kurvor av funktioner, trots att dessa areor inte bestämdes med kvadratur utan istället med de minimala övertäckningarnas tesselleringsgeometri genom gymnasiets integralkalkyl.

Definitionen av area med hjälp av minimala övertäckningar (tesselleringsgeometri) säger att det inte är något problem om enhetsytorna överlappar varandra, men det får inte vara något glapp mellan enhetsytorna. Det fantastiska med denna definition är att det är den definition som professionella matematiker använder samtidigt som den passar att använda redan i förskolan. Det går att tävla om att täcka över en yta med så få björklöv som möjligt. Det går att utforska om asplöv, rönnlöv, cirklar, trianglar eller kvadrater är effektivast för att täcka över en yta. Svaret är att enhetsytan bör vara lätt att tesselera, dvs att lägga kant i kant så att den täcker ytan utan glapp samtidigt som den inte överlappar, dvs blir minimal. Konstnären M. C. Escher var duktig på det med sina underfundiga figurer om fåglar, fiskar och andra djur som täcker hans mål-



ningar utan varken glapp eller överlappning. Lite enklare är att använda någon lättitrad geometrisk figur, såsom trianglar eller kvadrater. Här bortser jag från de påhittiga fall som matematiker har konstruerat. Exempel på ett sådant är ytan av alla tal $(x; y)$ i kvadraten $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$ där minst ett av talen x och y i varje talpar är rationellt. En sådan yta har areamåttet noll, men behöver en enhetskvadrat för att övertäckas.

Kvadratens area

Vi provar att använda de två definitionerna för att beräkna arean på en kvadrat med sidan 3 meter. För den moderna definitionen räcker det med att kunna multiplikationstabellen och definitionen av area som att bestämma antalet enhetskvadrater som minimalt övertäcker kvadraten. Vi behöver inte lägga ut alla enhetskvadrater utan det räcker med att bara lägga ut antalet enhetskvadrater på längden och på bredden och sedan multiplicera och få 9 kvadratmeter. Vi har den franska matematikern Alexis-Claude Clairaut (1713–1765) att tacka för detta enkla sätt att bestämma area. Clairaut var underbarn i matematik och erkänt skicklig matematikdidaktiker vars böcker översattes till flera språk inklusive svenska. En not i sammanhanget är att Clairaut förstås inte var först med denna metod för att bestämma area, men han gjorde det med matematiska argument och dessutom på ett lättbegripligt sätt. Med denna definition av begreppet area blev det för enkla figurer smidigt att beräkna antalet enhetskvadrater med en areaformel med multiplikationstabellen som stöd. Vi kan därför beskriva denna definition av area som "aritmetisering av geometrin" ungefär som matematikhistoriker talar om "analysens aritmetisering" under 1800-talet när gränsvärde definierades med hjälp av tal. Färd med geometrins aritmetisering är att man lätt hamnar i en formelsamling för olika geometriska figurer och missar den fantastiska idén om att tessellera.

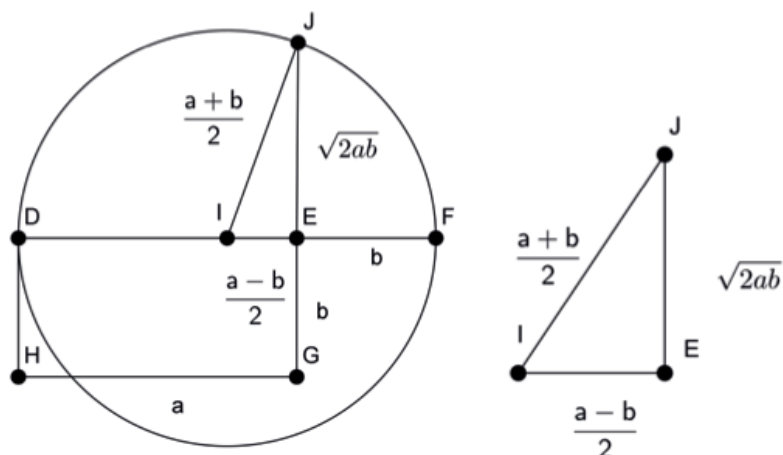
Med antikens kvadratur som definition av area blir svaret faktiskt ännu enklare, nämligen "en kvadrat med sidan 3 meter". Vi behöver inte kunna multiplikationstabellen och inte heller lära oss enheten "kvadratmeter". Definitionen av area genom kvadratur kräver konstruktionsgeometri och det är högst troligt att denna definition hänger samman med frånvärdet av två matematiskt viktiga byggstenar. Den första saknade byggstenen är att antik grekisk matematik inte använde något positionssystem utan ett additivt talsystem. Det gjorde numeriska beräkningar av så enkla saker som multiplikation ganska komplicerade. Den andra saknade byggstenen är sammansatta enheter som "kvadratmeter", vilka inte användes i antiken. Exempelvis beskrevs hastighet inte som kvoten km/h med olika enheter i täljare och nämnare. Betrakta följande exempel: Greta promenerar 5 km/h. Hur långt hinner hon på en halvtimme? Idag löser vi det som hastighet multiplicerat med tid. Detta sätt att lösa problemet skulle ha varit smått obegripligt för antikens matematiker som istället resonerade så här: På en timme promenerar Greta 5 km. En halvtimme är hälften så lång som en timme. Alltså hinner Greta hälften så långt som 5 km. Notera att i denna lösning dividerar vi km med km och timmar med timmar men inte km med timmar. Vi använder alltså enbart dimensionslösa (enhetslösa) kvoter.

Arean av en rektangel

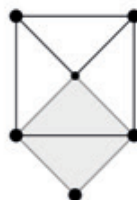
Med area definierad som minimal övertäckning bestämmer vi rektangelns area på samma sätt som kvadratens och multiplicerar bas med höjd. Med kvadratur är det betydligt knepigare. Definitionen kräver nämligen en hel del matematiskt arbete för att konstruera om en rektangel till en kvadrat med samma area. Det kräver att vi i en rektangel med sidorna a och b låter kvadreringsregeln och konjugatregeln samarbeta i Pythagoras sats genom att

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 2ab$$

Låt oss göra detta i följande geometriska konstruktion.



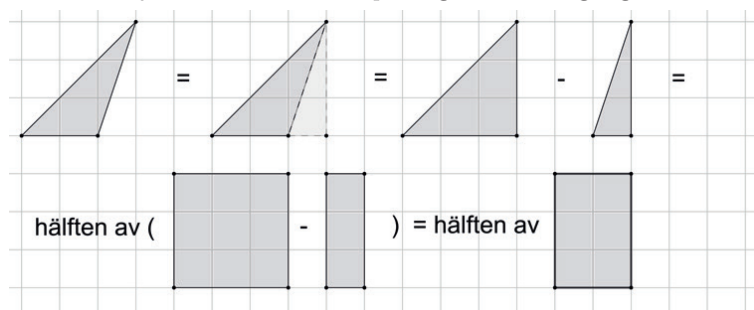
Givet rektangeln DEGH med kantlängderna a och b , konstruera sträckan EF med längden b (med en passare från kanten EG). Dela sträckan DF mitt itu i punkten I. Sträckan DI blir nu $(a+b)/2$ och sträckan IE blir $(a-b)/2$. Med hjälp av en passare kan vi nu konstruera punkten J där cirkeln skär en linje genom EG, så att vi får en rätvinklig triangel. Enligt Pytagoras sats är nu sträckan JE kant i en kvadrat med arean $2ab$. Sista steget blir att konstruera en kvadrat med arean hälften av $2ab$ på följande vis:



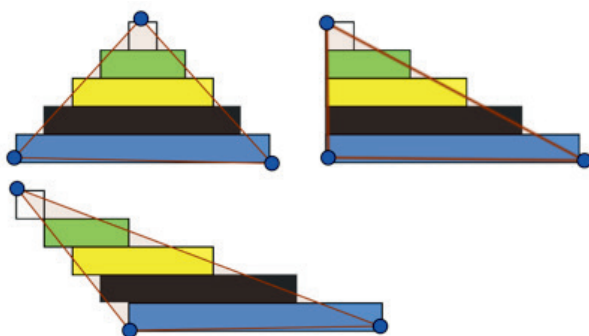
Rita diagonalerna i kvadraten med sidan JE. Kanten på vår sökta kvadrat blir halva diagonalen. Nu äntligen har vi kantlängden på en kvadrat med vår sökta area.

Arean av en triangel

Härledning av triangelns area ser olika ut i konstruktionsgeometrin och tesseleringsgeometrin. I konstruktionsgeometrin får vi tre olika fall beroende på om triangeln är rätvinklig eller om toppvinkeln befinner sig innanför eller utanför basen. Det tredje fallet kan illustreras på ett geobräde enligt figuren:



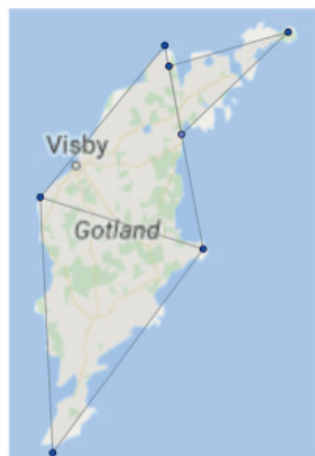
Med tesselleringsgeometri får härledningen av triangelns area ett och samma utseende oavsett var toppvinkeln befinner sig. Figuren nedan illustrerar härledningen med Cuisenairestavar staplade så att de bildar olikformade trappor. Oavsett hur man förskjuter stavarna i trapporna har de samma area. I kartong kan man klippa till tunnare, och fler, skivor och därmed göra en mer noggrann illustration av härledningen. Att dela in figurer i små rektangulära skivor, uttömningsprincipen, är en uppfinning som tillskrivs Eudoxos (ca 408–355 fKr) och motsvarar *Cavalieris princip* från 1600-talet samt förebådar det moderna integralbegreppet i gymnasiematematiken.



En slutsats är att härledning enligt tesselleringsgeometri dels är mer generell då en princip hanterar alla triangeltyper och dels att denna princip kräver färre konstruktionssteg. Dessa båda egenskaper brukar matematiker beskriva i estetiska termer som vackra bevis och matematisk skönhet.

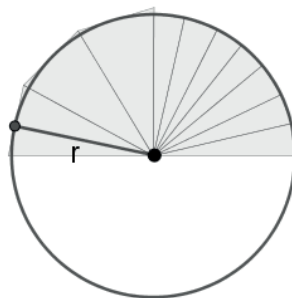
I fallet med rektangelytor är det smidigt att tessellera med kvadrater, då arean följer av multiplikationstabellen. För många andra ytor vore trianglar smidigare som enhetsytor. De har fördelen att ha samma area även om vi förändrar formen, så länge basen och höjden är densamma. Det gör dem mer anpassningsbara till ytor som inte är rektangulära, till exempel Gotlands area. Särskilt användbara blir trianglarna om de tillåts ha olika storlek då deras areor är lätta att bestämma.

Det mest välkända exemplet i skolgeometrin på att tessellera med likformiga trianglar är att cirkelns area kan tesselleras med tunna sektorer, som kan approximeras godtyckligt noga med trianglar. Dessa trianglar har radien till höjd och deras sammanlagda bas är cirkelns omkrets. Därmed har vi konstruerat om cirkeln till en triangel med area $O \cdot r/2$. Konstruktionen nedan visar att approximationen blir ganska god även med stora trianglar som i cirkelns andra kvadrant och redan antikens matematiker använde denna konstruktionsprincip för att bestämma ett närmevärde på talet π .



Sfärens area

Sfärens area härleds på mycket olika sätt i konstruktionsgeometri och tesselleringsgeometri. Härledningen med tesselleringsgeometri går lätt att illustrera genom att linda rep runt en tennisboll medan den formellt matematiska hanteringen av detta kräver gymnasiematematik i form av integraler och trigonometri. Vi börjar därför med konstruktionsbeviset, som använder likformiga trianglar.



Att härleda sfärens area genom tesseleringsgeometri kan illustreras med ett enkelt experiment, som i de två foton, där en tennisboll tesselleras med ett cirka 1cm tjockt och cirka 2m långt rep.





Tejpa fast repänden vid ekvatorn på tennisbollen och tessellera halvsfären genom att linda repet runt bollen. Mät antingen reptampen som blir över eller den del som behövdes för att tessellera halvsfären. Tessellera sedan två cirklar med samma diameter som halvsfären. Det visar sig gå åt ungefär lika mycket rep för att tessellera halvsfären respektive de två cirklarna. Alltså måste halvsfärens area vara ungefär fyra cirklar stor. Det går förstås även att i detta experiment tessellera hela sfären och jämföra med fyra cirklar.

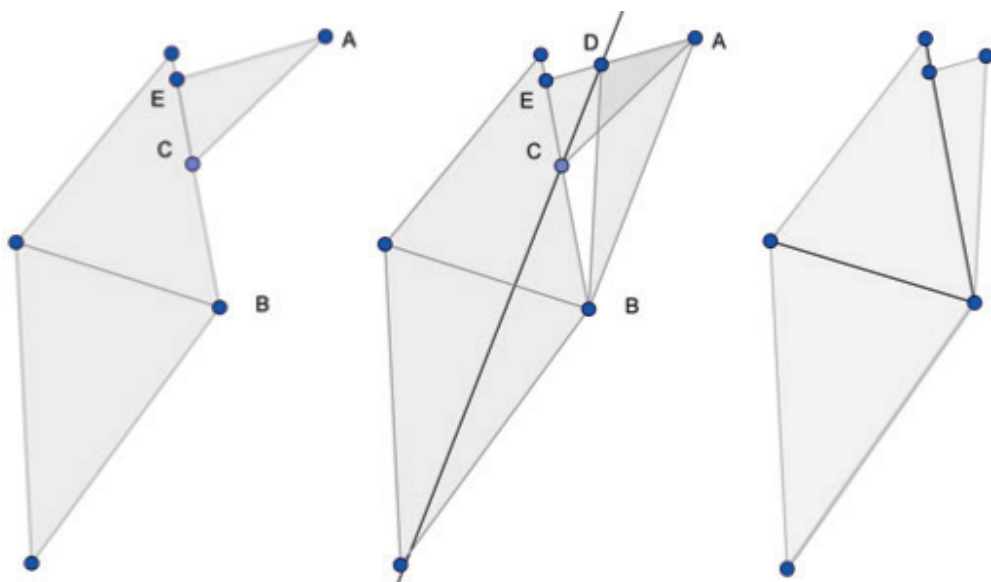
Går vi in på detaljer, så gör ett 1 cm tjockt rep att tesselleringen sker 0,5 cm utanför sfären. I detta experiment, går det därför åt lite mer rep för att tessellera halvsfären jämfört med två cirklar. Men med gymnasiematematikens hjälp kan vi tessellera sfären med precis så tunna och långa rep vi i fantasin önskar och vi gör det på följande sätt. Precis som i konstruktionsbeviset, tecknar vi arean för ett band runt sfären, fast med hjälp av trigonometri. Bandet har längden $2\pi r = 2\pi R \cos(\alpha)$ och bredden $h = R d\alpha$ där $d\alpha$ betecknar den lilla vinkeln A-origo-C. Skillnaden är att vi inte jämför sfärens band med cylinderns band, utan istället direkt summerar sfärens band och med gymnasiematematikens gränsvärde (där repets tjocklek $d\alpha \rightarrow 0$) låter det bli en integral, som gymnaster lätt kan beräkna. Arean för halvsfären blir uttrycket nedan där vinkeln går från ekvatorn vid latitud 0 till polen vid latitud $\pi/2$.

$$\sum 2\pi R \cos(\alpha) R d\alpha \rightarrow 2\pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha) d\alpha = 2\pi R^2$$

Vad det gäller matematisk skönhet, så är denna gång konstruktionsbeviset vackrare, då det dels kräver mindre av matematisk förkunskap och dels kopplar ihop sfärens area med cylindermantelns area.

Arean av en polygon

Enligt tesselleringsgeometrin kan vi approximera Gotlands yta med en polygon och dela in den i trianglar och beräkna summan av dessas area. Den antika konstruktionsgeometrin har istället en algoritm för att minska antalet hörn med ett i taget tills en triangel återstår. Slutligen ska triangeln i sin tur konstrueras om till en kvadrat med samma metoder som tidigare beskrevs för rektangeln.



Algoritmen fungerar för såväl konvexa som konkava hörn i polygonen och vi illustrerar här det konkava fallet med triangeln ABC utanför polygonen. Algoritmen består av följande steg.

1. Välj det hörn som du vill bli av med. Här väljs det konkava hörnet C.
2. Konstruera linjen genom C så att den är parallell med linjen genom grannhörnen A och B.
3. Ersätt triangeln ABC med triangeln ABD eftersom dessa har samma bas och höjd och därmed samma area. I detta konkava fall ligger de båda triangelarna utanför polygonen, i det konvexa fallet ligger de innanför polygonen. (Med andra ord har triangeln ACE innanför polygonen ersatts med triangeln DEB innanför polygonen).
4. Nu är den reducerade polygonen klar. Börja om på steg 1 med nästa hörn som du vill bli av med tills endast en triangel återstår.

Att bestämma arean av en polygon med tesselleringsgeometri respektive konstruktionsgeometri illustrerar tydligt skillnaden mellan dessa två metoder. Den förra kräver kunskaper i att konstruera varje deltriangelns höjd, kunskaper i att mäta (bas och höjd) och i aritmetik för att beräkna arean. Den senare kräver endast goda kunskaper i konstruktionsgeometri samt att kunna mäta kantlängden på den slutliga kvadraten.

LITTERATUR

- Jansson, S.O. (1995). *Måttordboken*. Stockholm: Nordiska museets förlag.
 Katz, V.J. (1998). *A history of mathematics: an introduction*. (2. ed.) Reading, Mass.: Longman.