Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Ett sätt att tänka om undervisning av relevansförmågan

När en av författarna ställde en fråga till lärare i facebookgruppen "Matematikundervisning" om hur de arbetar med relevansförmågan öppnades en dörr till en lavin av starka åsikter. Två saker i tråden var särskilt intressanta att ta del av. Det ena var att förmågan är svår att bedöma och det andra att relevansförmågan inte är särskilt relevant.

Man får ju naturligtvis tycka vad man vill, men nu har vi skrivningarna om relevans i styrdokumenten. Därför måste vi undervisa om relevans, både på grundskolan och i gymnasiet. I grundskolan finns inget kunskapskrav kopplat till relevansförmågan med den är tydligt framskriven i syftesbeskrivningen. I gymnasieskolan finns det även ett kunskapskrav som ska bedömas.

Relevans handlar om matematikens relation till människors behov av den även utanför matematiken. Innan vi behandlar relevansens relevans är det bra att konstatera att relationen mellan matematik och omvärld ofta överdrivs. Matematik är en abstrakt konstruktion, men vi kommer inte alltid åt den utan att referera till konkreta situationer och erfarenheter av omvärlden. Men som vi beskrev i våra artiklar om begreppskunskap i Nämnaren 2018:2 och 2018:3 är det också viktigt att kunna lämna matematikens konkreta ursprung och resonera helt i världen av symboler och begrepp. Även den matematik som har sitt ursprung i det konkreta utvecklas genom att kopplingen med de vardagliga erfarenheterna bryts och ersätts med uppfattningar som har sin grund i den matematiska formalismen. Ett exempel på det är när Newton ville hantera de världsliga fenomenen hastighet och acceleration. Bara när han vände sig från det konkreta kunde han utveckla sina idéer med hjälp av strikt matematisk formalism. Matematiken har just den här rollen. Visserligen har vår hjärna inte utvecklats till vad den är genom övningar i matematiskt tänkande, det är helt andra saker vår kognition är utvecklad för. Men ändå fungerar matematiken som en kognitiv förstärkare. Matematiken, med sin formalism, sina algoritmer och rutiner och formella resonemangssystem hjälper oss att hantera saker vi annars inte kan förstå.

Matematikundervisning handlar alltså mycket om att hjälpa eleverna att utveckla förmågan att resonera matematiskt, utan att referera till vardagliga företeelser. Så vi ska inte överdriva den abstrakta matematikens relation till omvärlden, men vi ska inte heller underskatta behovet av att relatera matematiken till omvärlden. Många elever ser matematik som någonting som hör till klassrummet och endast klassrummet. Uppgifterna i matematikboken uppfattas ofta som orealistiska, ointressanta och verklighetsfrämmande.

Så trots att matematiken har en nära koppling till mänsklighetens konkreta problem, så uppfattas inte skolmatematiken så. För att råda bot på detta har det skapats speciella kursplaneformuleringar om relevans. Frågor som kan ställas: *Varför är matematiken relevant? Varför har den betydelse? Vad har man den till? Varför finns den matematik som finns och inte helt annan matematik?* Att veta sådant här är inte matematisk kuriosa utan det hjälper faktiskt till för att förstå matematiken i sig. Som nämndes i ingressen är det många lärare som upplever relevansförmågan som svårbedömd och irrelevant. Därför vill vi ge några exempel på hur man kan undervisa och bedöma relevansförmågan.

Historieberättande

Vi lärare kan anknyta matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang genom att inleda en lektion eller en längre undervisningssekvens med en berättelse om de matematiker som har utvecklat de centrala begrepp som utgör navet i det matematiska innehåll vi ska arbeta med. När dök behovet av den här matematiken upp i historien? Varför? Var det kanske ett behov från den tillämpade matematiken eller var den aktuella matematiken ett resultat av ett nördigt hobbyutövande av arbetsbefriade privilegierade personer i samhället?

Det här sättet att arbeta med relevans är i linje med syftesbeskrivningen men inte särskilt lämpligt för bedömning. Det blir ju absurt att tänka sig att eleverna ska kunna redogöra för just de mer eller mindre slumpmässiga områdena som läraren har redogjort för. Men allt vi gör behöver inte bedömas. Dessa berättelser kan ändå vara väl så värdefulla för eleverna. De intresserade eleverna vill såklart ofta veta mer, men av särskilt intresse är de elever som uppfattar matematik som en enahanda exercis av likartade (meningslösa) uppgifter sida upp och sida ner i läroboken. De ges nu en möjlighet att omvärdera sina föreställningar om matematik som vetenskap. Kanske kan matematiken framstå som lite mindre världsfrånvänd än så som den framställs i läroböckerna? En speciell finess med den här undervisningen är att man själv i tillägg till att berätta själva historian också kan visa hur man kan leta rätt på fakta om något matematiskt begrepp, metod eller område. Vi återkommer till det.

Fördjupa undervisningen i något som berör alla varje dag

Ett mer komplext och genomgripande sätt att arbeta med relevans är att skapa ett större temaarbete om något som har stor betydelse för våra elevers vardag. Vi ger förslag på några danska undervisningssekvenser för gymnasiet som bygger på ett sådant arbetssätt, se den avslutande litteraturrutan. Där finns texter och uppgifter som du kan använda eller inspireras av.

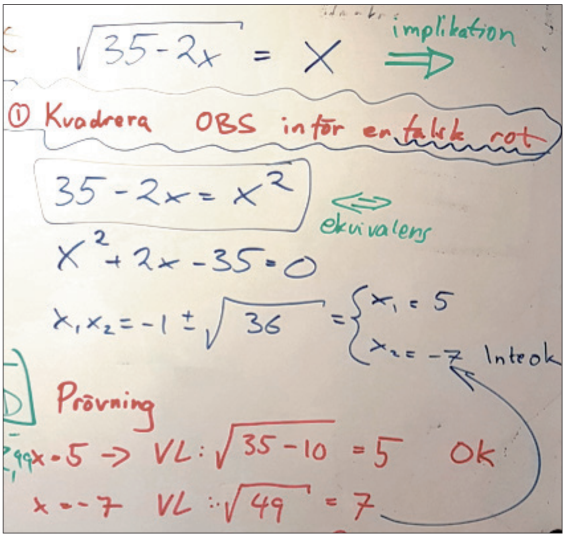
Ett av områdena som behandlas är kryptering. För bara 30 år sedan var kryptering något exotiskt som kanske mest användes av militären och hemliga älskande som ville dölja sin korrespondens, men idag skickar alla krypterade meddelanden mest hela tiden, som när vi swishar eller gör bankaffärer. Det fina med kryptering, förutom att det är viktigt i samhället, är att vi kan arbeta med det i alla åldrar, från enkla Caesarkrypton till komplicerad RSA-kryptering – ett utmärkt sätt att undervisa talteori om du frågar oss! Division, primtal, delare, aritmetikens fundamentalsats, binära tal, kongruens, Fermats lilla sats, den kinesiska restsatsen, Eulers sats, moduloräkning, … ja, det mesta ryms inom kryptering med kodsystem eller chiffer.

Modern kryptering bygger ofta på så kallad öppen nyckel. För detta behöver vi en inverterbar funktion f, sådan att även med kännedom om f, så är det beräkningstekniskt omöjligt att räkna ut $f^{(-1)}$ inom överskådlig tid, även med en supersnabb dator. En sådan funktion kallas för en envägsfunktion. Det första exemplet på öppen nyckelkryptering är RSA, döpt efter upphovsmännen Rivest, Shamir och Adleman. Historien om hur de efter en lång tids sökande slutligen hittade sin envägsfunktion innehåller mycket målmedvetet arbete men även en rejäl dos israeliskt vin som bränsle för de sista avgörande insikterna. RSA-kryptering är av många skäl intressant ur ett relevansperspektiv. Dels är det som sagt närmast att betrakta som en bärande komponent av hela det moderna kommunikationssamhället, dels är RSA matematiskt intressant på flera plan och kan även förklaras på olika detaljnivåer. RSA bygger på primtal, multiplikation och faktorisering. Man hittar två stora primtal p och q och skapar $n = pq$. Krypteringsnyckeln f kommer att bygga på talet n som alltså kan vara offentligt men för att hitta $f^{(-1)}$ behöver man kunskap om p (eller q). Det låter ju löjligt, för om vi t ex tar $p = 5$ och $q = 7$, får vi $n = 35$ och det är ju en barnlek att se att det var just 5 och 7 som vi började med. Så fungerar det inte om vi multiplicerar två jättestora primtal med 500 siffror. Då finns inget känt sätt att återfinna p och q, förutom att prova sig fram. Finessen är dock att det inte går att knäcka den här koden. Inte idag i alla fall, men den som lever får se hur det går i framtiden. Det finns gott om populärvetenskapligt material om RSA och annan kryptering.

För gymnasielärare uppstår nu frågan om hur man kan bedöma elevernas arbete i relation till relevansförmågan när man arbetar på detta sätt. Om jag ger eleverna uppgifter med talteoretiska problem så är det väl ändå fortfarande bara problemlösning, även om problemen är relevanta för kryptering? Ja, absolut. Det krävs en mer samhällsvetenskaplig ansats för att bedöma den del av arbetet som berör kunskapskravet om relevans: ”Genom att ge exempel relaterar eleven något i några av kursens delområden till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra välgrundade och nyanserade resonemang om exemplens relevans.” Vi menar att det krävs skriftliga och/eller muntliga redovisningar där matematikens betydelse (inte matematiken) är i fokus. Om du är ovan vid bedömning av skrivna texter så finns den kompetensen hos dina kollegor som undervisar i samhällskunskap och historia. Kanske kan ni passa på att göra ett ämnesövergripande arbete tillsammans?

Förankra begrepp eller metoder i sin historiska kontext

Ett tredje sätt att arbeta med relevans är att ta utgångspunkt i matematiska händelser eller frågor som uppkommer nästan varja lektion. För en tid sedan arbetade jag, Linda Marie, och mina elever med ekvationen $\sqrt{35 - 2x} = x$. Vi kvadrerade båda sidorna och prövade sedan rötterna, för att undersöka om vi infört någon falsk rot (se bilden av vår tavla nedan). En av mina elever ville inte gå med på att det skulle vara något fel på roten -7, som vid prövning gav +7. Hans resonemang var att eftersom rötter alltid är +/- så var det väl hugget som stucket vilket tecken 7:an har. Jag blev själv fundersam. Han hade ju en poäng, men jag vet ju rent operationellt att +7 inte blir godkänd i den här prövningen. Det här behövde vi gå till botten med.



Mina undersökningar visade att talet $\sqrt{2}$ har varit känt av mänskligheten sedan år 1800 f Kr och redan då kunde man exempelvis visa att $\sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. De så kallade gamla grekerna kunde visa att roten ur heltal som inte är kvadrater från början alltid är irrationella tal, som t ex roten ur 2. För grekerna uppkom behovet av att hantera rötter typiskt genom geometriska överväganden och roten ur 2 var då längden av diagonalen i en kvadrat med sidan 1. Historiskt uppkom därför inte frågan om huruvida roten ur ett tal kan vara negativt. En längd betraktar vi ju vanligen som något positivt. Det är när vi försöker att definiera roten ur på ett algebraiskt sätt som frågan dyker upp, för då bestämmer vi att kvadratroten ur ett tal a är ett tal y sådant att $y^2 = a$. Så här funkar ju både -7 och 7 som roten ur 49. Men symbolen $\sqrt{}$ står faktiskt inte för roten ur, i den här meningen. $\sqrt{}$ betecknar något som formellt kallas för principalroten och vi har bestämt att principalroten, $\sqrt{x}$, är en funktion med positiva värden. När vi skriver $\sqrt{}$ i en ekvation som ovan, så menar vi principalroten, fastän vi lite slarvigt kallar det för roten. Det här med att hålla ordning på vad som är principalroten blir ännu viktigare när vi hanterar roten ur komplexa tal. En ytterligare fråga när vi ändå har symbolen $\sqrt{}$ uppe är varför vi ens håller fast vid den? $\sqrt{x}$ kan ju även skrivas som $x^{1/2}$ och när man väl har motiverat det skrivsättet så blir det ju väldigt enkelt att räkna med kvadratrotfunktionen och andra rotfunktioner genom vanliga potensräkneregler, som t ex att $(x^{1/2})^2 = x^{2 \cdot 1/2} = x^1 = x$. När vi i matematiken hittar sådana här smarta notationer som hjälper oss att räkna så brukar vi glatt införa dem, men i det här fallet så är tydligen $\sqrt{}$ ett allt för kärt barn för att helt ersättas av potenser.

Var det här intressant, eller visste du kanske redan detta? Jag fick lära mig nya saker och mina elever har fått mycket lättare att minnas både vad begreppet står för och hur man får använda det när det finns en kontext i minnet att fästa upp sina kunskaper på.

Låt eleverna lära sig relatera

Det tar inte så lång tid att leta upp fakta när man har fått upp snitsen. Mina elever har visserligen inte tillgång till internet eftersom de sitter i fängelse så jag får sköta ad hoc-googlandet. Men om de hade internet skulle jag låta dem göra jobbet.

Uppkopplade elever kan själva relatera matematiken till dess betydelse i ett samhälleligt och historiskt sammanhang genom att undersöka när ett begrepp införs i matematiken och vilket behov som ledde fram till det. Det är helt enkelt en förmåga man kan lära ut. Det här sättet att arbeta med relevansförmågan ger goda möjligheter till bedömning. Antingen kan eleverna ha en muntlig presentationen av sitt arbete eller en skriftlig inlämning. Eller båda, vilket jag föredrar, då klasskamraterna får ta del av varandras arbete samtidigt som jag har ett solitt bedömningsunderlag om rektor, elev eller vårdnadshavare undrar hur eleven ligger till i *utvecklingen av relevansförmågan.*

Att undersöka begreppens historia odlar elevernas nyfikenhet för ämnet. Till exempel så ledde resonemanget ovan om att roten ur ett tal alltid är positiv till ytterligare funderingar om när behovet av att kunna dra roten ur negativa tal uppstod, alltså när det imaginära talet *i* infördes och varför. En annan sak som har förbryllat oss är varför förhållandet mellan sidorna i en rätvinklig triangel kallas cosinus och sinus. Vad är egentligen etymologin för dessa begrepp? Tangens som i tangent i enhetscirkeln går ju utmärkt att förstå, men de andra trigonometriska uttrycken? Ja, där gick vi faktiskt bet, men det verkar som terminologin har uppkommit genom en missuppfattning av arabiska texter när de lästes av europeér. Den läsare som kan kasta ljus i frågan är mycket välkommen att ge en replik.

Hur hittar man de fakta man söker utan att gå vilse på nätet? Vi börjar alltid på engelskspråkiga Wikipedia. Vi tycker att det är en utmärkt källa. Att läsa om matematik i sådana texter har inte bara med matematikens relevans att göra, utan är också en komponent av matematisk kommunikationsförmåga. Eleverna behöver träna på att våga läsa texter där det finns komplicerade passager som de inte förstår. Texter som sätter matematiska begrepp och metoder i historiskt sammanhang eller förklarar olika tillämpningar är inte alltid tillrättalagda för att passa elevernas kunskapsnivå. Men genom att läsa sådana texter kan elever lära sig att det går att tillgodogöra sig en större helhet av ett resonemang som förs, även om man inte förstår allt som skrivs.

LITTERATUR

Brzezinski, J. (2001). *Om felkorrigerande koder – matematik i säkerhetstjänsten*. Nämnaren 2001:3.

Jankvist, U. T. (2008). *Den tidlige kodningsteoris historie – et undervisningsforløb til gymnasiet*. IMFUFAtekst 459.

Jankvist, U. T. (2008). *RSA og den heri anvendte matematiks historie – et undervisningsforløb til gymnasiet*. IMFUFAtekst 460.

Jankvist, U. T. (2012). *Historisk fremkomst og moderne anvendelse af grafteori – et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet*. IMFUFAtekst 486.

Jankvist, U. T. (2012). *Historisk fremkomst og moderne anvendelse af Boolsk algebra – et matematikfilosofisk undervisningsforløb til gymnasiet*. IMFUFAtekst 487.

Thompson, J. (1984/85). *Vad kan vi lära av matematikens historia?* Nämnaren 1984/85:1.