

Här fortsätter diskussionen om hur eleverna kan/ska räkna. Det första inlägget kommer från den internationellt kände forskaren och matematikdidaktikern **Stieg Mellin-Olsen** från Bergen vars specialintresse är de sammanhang och den miljö man påverkas av vid inläring av matematik. Sedan återkommer **Jan Unenge** och **Göran Emanuelsson** med inlägg.

Hvem bestemmer hvilken algoritme elevene skal bruke?

Det er en viktig debatt Göran Emanuelsson og Jan Unenge har dradd igang om algoritmer.

Jeg tolker Unenges innlegg som en taktisk provokasjon for å få kollegene inn på banen. Han stiller spørsmålet om hva man skal med algoritmer, og om ikke elevene er bedre tjente med å slippe å lære disse.

Han bruker "algoritme" som "standard algoritme". Den videre debatten vil låse seg dersom en ikke skiller mellom barns algoritmer og standard algoritme (som også barna kan ha som "sin algoritme"). I de eksempler som Unenge gir på oppgaver som barna klarer å regne uten å ha lært noen standard algoritme, bruker barna likevel en algoritme. Vi kommer neppe noen veg med diskusjonen dersom en ikke innrømmer barns løsninger på problemer status som algoritmer.

Vi har dermed følgende situasjon:

Det finnes noe som heter standard algoritmer for bl a de fire regningsartene. Disse vektlegges i ikke liten grad i skolen.

Det finnes noe som heter barns private algoritmer, også for de fire regningsartene. Disse algoritmene er rikt dokumenterte gjennom forskning, ikke minst gjennom arbeidene til Bengt Johansson og Wiggo Kilborn.

De fleste pedagoger som arbeider med matematikk fagdidaktikk vil være enige i betydningen av at en tar hensyn til barns private algoritmer i undervisningen. Jeg oppfatter at uenigheten knyttes til vektleggingen på standard algoritme: skal barna lære disse og bruke disse når deres egne algoritmer fungerer? Unenges posisjon er ifølge teksten hans i Nämna-
ren nr 1 1989: Prøv og glem standard algoritmer så lenge som mulig.

Denne posisjonen er problematisk. Hva med barn som velger standard algoritme som sin egen metode?

Skal læreren unngå å nevne standard algoritme? Skal hun holde barna borte fra læreboken der standard algoritme finnes? Skal vi se bort fra standard algoritme som objektiv kunnskap i den forstand at de er en

del av en kulturarv som elevene bør få tilgang til?

Johnsen-Höines og jeg havner i følgende posisjon — med referanse til virksomhetsteorien:

Gjennom problemløsning utvikler barna sine egne algoritmer. I praksis erfarer vi og våre studenter det samme som Unenge: Glede og skapende bruk av matematikken.

Elevene diskuterer algoritmene sine i klassen (en kunnskap er først blitt personlig når den er delt med andre). Gjennom denne diskusjonen bringer læreren standard algoritme. Standard algoritme blir vurdert mot barnas algoritmer ut fra de kriterier som gjelder for en god algoritme: den skal være generell, effektiv, gi rett svar osv.

Erfaringen vår er at etter denne prosessen vil de aller fleste elevene bruke standard algoritme. Men fordi vi har hjulpet dem med å få øye på deres opprinnelige egne algoritmer kan de falle tilbake på disse dersom det passer slik. Videre kan de vindskeive¹⁾ elevene våre få lov fortsatt å være vindskeive, og bruke sine egne metoder. Språkbruken min er upresis her — jeg forutsetter nemlig at den majoriteten av elever som bruker standard algoritme har gjort denne til "sin egen" metode.

Et siste poeng viser betydningen av den diskusjonen som er startet. Vi skal inn på alvorlige ting som menneskesyn og undervisningens politiske funksjon. Vi kan gjerne ønske at samtlige elever skal bruke standard algoritme. Men hvordan i all verden

kan vi tro at vi skal få alle elevene til å bruke dem? Er det fagdidaktikere og lærere som skal bestemme hvilke metoder elevene skal bruke til å regne med? Er det ikke eleven selv?

Innenfor virksomhetsteorien oppløses dette dilemmaet. En algoritme oppfattes som et redskap. Redskapet er i hendene på eleven. Elevene velger ut redskap og vurderer til sjuende og sist hvorledes det skal brukes.

Læreren kan bare legge fram de redskapene som hun har å tilby. Hun kan arbeide godt metodisk, slik at elevene forstår betydningen av redskapet hun legger fram og forstår hvordan det skal brukes. Men hun kan ikke kripe inn i eleven som en annen mikropartner og bestemme når og hvordan eleven skal bruke kunnskapen. Hva vil vi kalle samfunn der kunnskapene formidles på en slik måte?

Fortsett diskusjonen! Fortsett!

Litteratur

- Johnsen Höines, M.: 1987, *Begynneropplæringen i matematikk*, Caspar, 5046 Rådal.
- Marit Johnsen Höines og Stieg Mellin-Olsens artikler i *Om Kunnskap*. Bergen Lærerhøgskole, 5030 Landås.
- Mellin-Olsen, S.: 1987, *The Politics of Mathematics Education*, D. Reidel, Dordrecht.
- Mellin-Olsen, S.: (i trykk) *Kunnskapsformidling*, Caspar, 5046 Rådal.

¹⁾ Vindskeiv "individualist"

Algoritmerna igen

Jan Unenge

Göran Emanuelssons inlägg i nr 2 och Stieg Mellin-Olsens i detta ger anledning till några kommentarer.

Stieg har helt rätt i att jag med algoritmer (naturligtvis) avser de standardiserade algoritmer som används för de fyra räknesätten. Han har också rätt i sin förmodan att jag till en del vill provocera för att få igång debatten ute bland lärarna.

En enkät bland hundratals lärare visar att de i sin undervisning av de så kallade rutinfärdigheterna arbetat mest med algoritmerna medan lärarna använt dessa minst i vardagslivet utanför klassrummet. Min fråga är då: hur förklarar och försvarar vi det inför eleverna? Varför håller vi på så mycket med något i skolan som vi sällan använder utanför matematiksalen?

Både Göran och Stieg har förslag till försvar. Göran påpekar att matematiken inte kan leva isolerat från ett kulturellt sammanhang — men det är just en del av min poäng. Samhället och dagens kultur håller på att springa ifrån skolmatematiken, bl a genom miniräknaren. Min position blir inte, som Stieg tror, problematisk. Eleverna längtar inte ihjäl sig efter algoritmer, den längtan tycks mig hetare från lärarna som närmast påtvingar eleverna dessa räkneregler så fort som möjligt. Eleverna kan i stället utveckla sitt arbete med tal, de kan upptäcka att $12 \times 7,5$ kan ändras till 6×15 och därmed klaras som huvudräkning. Blir det mer komplicerat är miniräknaren det självklara redskapet. Visst har algoritmerna varit ett effektivt och nödvändigt redskap men den tiden är förbi — i varje

fall utanför skolan, dvs i det liv skolan skall förbereda eleverna för.

Det jag framför allt bygger på är naturligtvis inte som Göran undrar någon "fix idé". Låt oss hoppas att inga allvarliga försök inom skolan har en så billig bakgrund. Det handlar i stället om seriösa försök och tolkningar av dessa. Ett av försöken har jag själv lett, men det finns flera runt om i världen. Stephen Lermans intressanta artikel i *Nämnan* nr 2 berör ett när han (s 11) hänvisar till *PrIME*-gruppen i Cambridge. Jag har sett försöken inom *CAN*-projektet på ort och ställe och då undrat vad vi håller på med — och vad vi nu debatterar. Hillary Shuard har skrivit mycket läsvärt och tankvärt om detta. Ralston har behandlat samma ämne i en artikel i *Nämnan* för ett par år sedan.

Stieg talar om kulturarv. Men för mig är kulturarvet i detta sammanhang positionssystemet, de fyra räknesätten, sambanden mellan dem och hur man med dessa kan beskriva eller lösa problem. Jag ställer större krav på kulturarv än en divisionsuppställning som ännu inte fyllt 10 år och som därför inte ens dagens föräldrageneration kan.

Både Göran och Stieg diskuterar standardalgoritmerna som om detta var ett beslut utan större konsekvenser för eleverna. Rader av undersökningar visar ju att resultatet av all undervisningsmöda kring algoritmerna är ganska magert. Varför inte ägna en liten tanke åt de tiotusentals elever som sitter i skolbänkarna i dag utan att klara av alla regler som är förknippade med algoritmerna, som inte

förstår poängen med detta slavande som också är en trolig källa till begreppet matematikångest. Därtill vet eleverna att hemma klarar de uppgifterna för där får de ju använda en miniräknare. Kan de inte få chansen att använda ett redskap som äntligen ger dem rätt svar? Det är ju det redskapet de skall använda efter skolan.

Låt mig fortsätta att provocera. För inte så många decennier sedan var det viktigt att kunna klara en tvätt med hjälp av byckar eller genom att ta med den och tvättbrädan till en strand. Nu är det självklart att man lär sig använda en maskin som sedan bättre och effektivare klarar detta rutinarbete, att med ett effektivt *medel* nå det önskade *målet*: en ren tvätt.

Och den tid som frigörs kan man använda till vettigare arbete. Varför t ex inte till att fundera över olika sätt

att matematiskt klara en vardagssituation? Är det inte dags för en stortvätt inom skolmatematiken — och därmed börja diskutera *målen* mot bakgrunden att teknikerna hjälper oss med allt bättre *medel*?

Litteratur

Can-project. The Second Year of Can-project. University of Cambridge, 1989.

Ralston, A. Frågor om matematikundervisning. *Nämnamnaren* nr 2, 187, s 29—33.

Shuard, H. *Primary mathematics today and tomorrow*. York: Longman Resources Unit, 1986.

Treffers A. Integrated Column Arithmetic According to Progressive Schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 1987, pp 125-145.

Unenge, J. *Skolmatematik — för vem och till vad?* ALM-projektet, rapport nr 1. Högskolan i Jönköping, 1989.

Bokföring av huvudräkning Användning av miniräknare

Göran Emanuelsson

Det förefaller inte som Jan Unenge vill diskutera sakfrågan, annat än på ett ytligt plan. Han biter sig fast vid de negativa erfarenheterna av standardalgoritmer — utan att reflektera över orsakerna — eller hur räknande och problemlösning i olika sammanhang hänger ihop. Stieg Mellin-Olssens inlägg däremot — ger de kopplingar jag efterfrågat.

Bokföring av huvudräkning — igen

För Jan Unenge är standardalgoritmerna för t ex division bara 10 år. I

själva verket fanns den i nuvarande form för flera hundra år sedan. När jag nämner historisk och kulturell utveckling, inrymmer jag naturligtvis framstegen inom talskrivning, positionssystem, effektivt räknande, algoritmer och tekniska hjälpmedel genom mänsklighetens historia. Vi ska inte heller glömma lärarnas ”matematikkultur”. I historien är miniräknarperioden kort!

Unenge ser i standardalgoritmer onaturliga regelsystem, som trycks på eleverna helt godtyckligt. Från reaktionerna på detta — drar han slutsatsen — att det alltid är fel på algorit-

merna — utan att fundera på om det är undervisningen om räknande och uppställningar, som gör att man missat poängen och förståelsen för grundtankarna.

Så icke Mellin-Olsen eller Treffers. Till den senare refererar egendomligt nog Jan Unenge i sin litteraturföreteckning. I Nederländerna har man prövat en studiegång, där man utifrån barns informella metoder att lösa problem via "progressiv schematisering" undan för undan kortar ned olika räkneuppställningar till en standardalgoritm. Vid en jämförande studie nådde en försöksgrupp på halva tiden nästan dubelt så bra resultat som en kontrollgrupp. Jag hade själv nöjet att besöka Utrechts riksuniversitet i sommar och höra litet om arbetet.

En annan dimension finns i Kilborns och Lundgrens arbeten. Där visas vad som faktiskt händer i undervisningsprocessen. Läraren gör algoritmräkandet till en rituell handling i stället för meningsfull inläring. Orsakerna till detta är verkligen något att fundera över. I läroplaner betonas huvudräkning, förståelse för räknesättens innebörd och problemlösning. "Ren algoritmräkning" tränas uppenbarligen betydligt mer än vad som sägs i lgr 80 och kommentarmaterialet. Vad är det i undervisningsprocessen — egentligen — som leder till det *meningslösa* algoritmräkandet, trots att alla vet att det ger så dåligt utbyte?

I detta nummer av Nämnen anmäls förresten en kursbok för den nya grundskollärlinjens ämnesstudier i grundläggande aritmetik. Författaren Wiggo Kilborn utgår från forskning om barns inläring och den historiska utvecklingen och behandlar även metodiska konsekvenser av ämnesteorin.

För att kunna lösa problem är det nödvändigt att man frigör tänkande och minneskapacitet för själva problemlösandet, att avgöra strategi, modell/räknesätt och kalkyl i olika steg. Då blir det, enligt mitt sätt att se, naturligt och nödvändigt att *bokföra huvudräkandet* i informella eller formella algoritmer. Hur ska man annars kunna kontrollera sitt tänkande under problemlösningens gång eller kommunicera med andra? Jag kan inte förstå, varför Unenge ser det som fördelaktigt med en bokföring, som säkert avviker från dagens standardalgoritmer. Jag håller med Mellin-Olsen om att det slutgiltiga valet måste vara elevens, men vill ändå peka på kursplanens målbeskrivning, som vi lärare har att följa.

Något om miniräknaren

Naturligtvis kan och ska räknaren användas, där så är lämpligt. Men vad är lämpligt? Helt klart är att användningen av matematiska modeller och hjälpmedel i vardag och samhälle har ökat och motiverar ökad uppmärksamhet på vad vi gör i skolan. I motsats till Unenge anser jag dock inte, att man *oreflekterat* ska föra in miniräknaren från första dagen i skolan. Jag är övertygad om, att räknaren ska vara ett kraftfullt verktyg i elevernas matematikinläring och problemlösning. Men som många andra lärare vill jag ha en noggrannare diskussion om hur. Det var en av orsakerna till mitt upprop i Nämnen 15/4. Den nederländska modellen (se Treffers eller Streefland) och den som Mellin-Olsen skisserat, ser jag som framkomliga i ljuset av Kilborns uppläggning av ämnesteorin. Det gäl-

ler att ha respekt för elevers tänkande och hjälpa dem utveckla mer generella verktyg.

Jag vill också påminna om det svenska *ARK-projektet* som väckt internationell uppmärksamhet och vars arbete presenterats i t ex *Nämnamnaren* 10/3: *Miniräknaren*. Från delprojektet som behandlade miniräknaren på mellanstadiet har getts ut ett fortbildningsmaterial med redogörelse för genomförandet, resultat, slutsatser och med ca 500 elevuppgifter, ett antal spel och förslag till projektuppgifter, se referenser nedan.

Ett färskt läroplansarbete som integrerar miniräknaren i matematiken från förskolan till gymnasietadiet är det amerikanska *Standards*, väl värt noggranna studier, liksom det nyligen presenterade engelska kursplaneförslaget. När det gäller CAN-projektet, tycker jag man kan vänta något med slutsatserna, tills man kommit litet längre än försök med åttaåringar. Vi följer naturligtvis med intresse arbetet.

Sammanfattningsvis

Låt oss systematiskt utveckla metoden med huvudräkning, olika former av algoritmer och miniräknare utifrån elevers erfarenheter och tänkande i meningsfulla sammanhang. I dessa sammanhang tycker jag inte, att det räcker med bara slagord eller försök till analogier. Därför tar jag inte upp den av Jan Unenge vid tvättmaskinen kastade handduken. Det finns en risk att bilder av den arten kan ge allför ytliga tankar. Det kan bli så att man kastar ut barnet med tvättvattnet.

Referenser

- Björk, L-E och Brolin, H. *ARK-projektet: En sammanfattande rapport för verksamheten 1976—1983*. Liber Utbildningsförlaget 1984
(ARK = analys av Räknedosans Konsekvenser)
- Björk, L-E och Brolin, H. Färdigheter och förståelse. *Nämnamnaren* 13/2—3. Tema: *Matematik i skolan. Ett service-material*. Utbildningsförlaget 1987.
- Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. NCTM 1989
NCTM = National Council of Teachers of Mathematics, (amerikanska lärarföreningen).
- Emanuelsson, G och Johansson, B. *Läraryrket i matematik*. En målbeskrivning för lärare i årskurs 1—7 och ett förslag till en inledande 5 poängskurs i kompletteringsfortbildningen. Institutionen för ämnesdidaktik vid Göteborgs universitet 1989.
- Hédren, R (red). *Miniräknaren på mellanstadiet*. Fortbildningsmaterial. Rapport 1987:1 Högskolan i Falun/Borlänge 1987.
- Johansson, B. Miniräknaren löser inte problemen. *Nämnamnaren* 9/3. Liber Utbildningsförlaget 1983.
- Kilborn, W. *PUMP-projektet*. Bakgrund och erfarenheter. FoU-rapport 37. Liber Utbildningsförlaget 1989.
- Kilborn, W. *Didaktisk ämnesteorin i matematik. Del 1 — Grundläggande aritmetik*. Utbildningsförlaget 1989.
- Nämnamnaren* nr 10/3. Temanummer: *Miniräknaren*. Liber Utbildningsförlaget 1984.
- Streefland, L. *Reconstructive Learning*. Proceedings of the 12th International Conference of PME. Vesz/ prém, Ungern 1988. (PME = Psychology of Mathematics Education.)
- Treffers, A. Integrated Column Arithmetic According to Progressiv Schematisation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 1987.