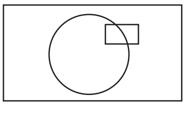
LASSE BERGLUND

Fraktaler – en fråga om upprepning

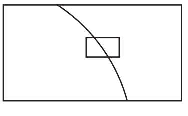
Fraktaler är intressanta både ur matematiskt och historiskt perspektiv. Författaren ger exempel på fraktaler som fått namn efter kända matematiker samt uppgifter att lösa i samband med detta.

En fraktal kan beskrivas som en kurva som är sönderbruten om och om igen. Den används ibland som en matematisk modell av företeelser i tillvaron som har denna sönderbrutna form, som t ex kuststräckor, blodkärl eller moln.

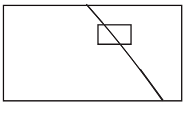
Till skillnad från vanliga geometriska figurer är fraktalen skallikformig. Det innebär att om man zoomar in och betraktar en detalj av fraktalen så ser den likadan ut som ursprunget. Jämför t ex med en vanlig cirkel som redan efter några få inzoomningar blir en rät linje; se figurer nedan.



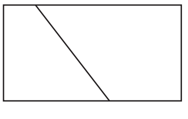
En cirkel



Inzoomning 1



Inzoomning 2

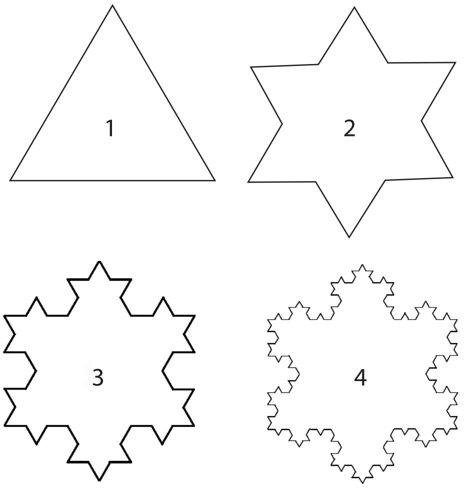


Inzoomning 3
En cirkel är ingen fraktal

Vi ska här ägna oss åt de välkända fraktalerna kochkurvan, cantormängden och sierpinski-triangeln, men vi nöjer oss med att studera vissa mönsteregenskaper.

Kochkurvan kan skapas enligt punkterna nedan.

1. Utgå från en liksidig triangel med sidan 1 längdenhet.
2. Ersätt den mittersta tredjedelen av varje triangelsida med två sidor i en liksidig triangel.
3. Upprepa processen exakt likadant.
4. Om man aldrig avslutar denna process, ja då har man en fraktal.



Kochkurvan i de fyra första stadierna.

- ◇ Hur lång är kurvan i den 190:e figuren?
- ◇ Kochkurvans area är helt klart begränsad även om processen fortsätter i evighet. Det är bara att lägga en tillräckligt stor kvadrat runt om och konstatera att kurvan hela tiden kommer hålla sig inom denna kvadrat. Men hur blir det med kurvans omkrets – blir den ändlig eller oändlig om processen fortgår i evighet?

För att besvara de två frågorna ovan inför vi några lämpliga beteckningar:

a_n = antalet sträckor i figur n.

s_n = längden av en sträcka i figur n.

L_n = den totala längden, dvs omkretsen i figur n.

Vi betraktar de första figurerna och får:

$a_1 = 3$ $\quad s_1 = 1$

$a_2 = 3 \cdot 4$ $\quad s_2 = 1/3$

$a_3 = (3 \cdot 4) \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$ $\quad s_3 = 1/3 \cdot 1/3 = (1/3)^2$

Vi anar mönstret då vi jämför indexnumret med exponenten ...

$a_4 = (3 \cdot 4^2) \cdot 4 = 3 \cdot 4^3$ $\quad s_4 = (1/3)^2 \cdot 1/3 = (1/3)^3$

... och generaliserar:

$a_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ $\quad s_n = (1/3)^{n-1}$

Allmänna uttrycket för kurvans längd blir:

$$L_n = \text{antal sidor} \cdot \text{längden per sida}$$

$$= a_n s_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot (1/3)^{n-1} = \frac{3 \cdot 4^{n-1}}{3^{n-1}}$$

$$L_n = 3(4/3)^{n-1}$$

Om vi låter enheten vara cm får vi:

$$L_n = 3(4/3)^{189} \approx 10^{24}\ \text{cm} > 10^{23}\ \text{cm} \approx$$

$$\approx 10^5\ \text{ljusår} \approx \text{vintergatans utsträckning.}$$

Eftersom $4/3 > 1$ så kommer fraktalen att bli oändligt lång då n växer, dvs $L_n \to \infty$ då $n \to \infty$.

Kochkurvan skapades av den svenske matematikern Helge von Koch redan i början av 1900-talet. En ännu tidigare så kallad fraktal är cantormängden, uppkallad efter Georg Cantor, verksam i slutet av 1800-talet. Konstruktionsprincipen är enkel: utgå från en sträcka med längden 1. Dela den i tre lika delar och ta bort mittdelen. Två sträckor återstår. Dela var och en av dessa i tre lika delar och ta bort mittdelen. Fortsätt processen i evighet. Nedan visas de fem första stadierna.

Några uppgifter:

1.

a) Ange ett allmänt uttryck a_n för antalet sträckor i figur n i cantormängden ovan.

b) Ange ett allmänt uttryck L_n för *cantordammet*, dvs den sammanlagda längden i figur n.

c) Bestäm $\lim_{n\to\infty} L_n$ och $\lim_{n\to\infty} a_n$.

d) Gör en kort sammanfattning av resultaten i c-uppgiften.

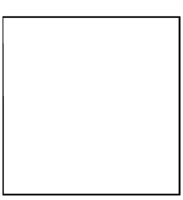
2. Betrakta figurerna nedan. Figur 1 är en vit kvadrat med sidlängden 1. I figur 2 har man ritat in en svart kvadrat, belägen i centrum och med sidlängden 1/3. Samma procedur upprepas.

a) Visa att den totala vita arean i den n:te figuren ges av sambandet $A_n = (8/9)^{n-1}$

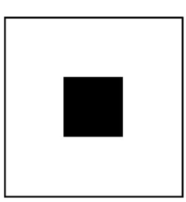
b) Ange det vita fältets storlek i figur 4.

c) I en av figurerna är den vita och den svarta arean appproximativt lika stora. I vilken figur?

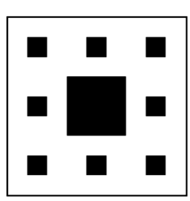
d) Rita en figur som beskriver situationen $\lim_{n\to\infty} A_n$.



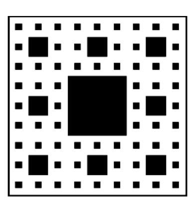
Figur 1



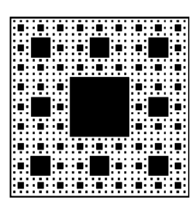
Figur 2



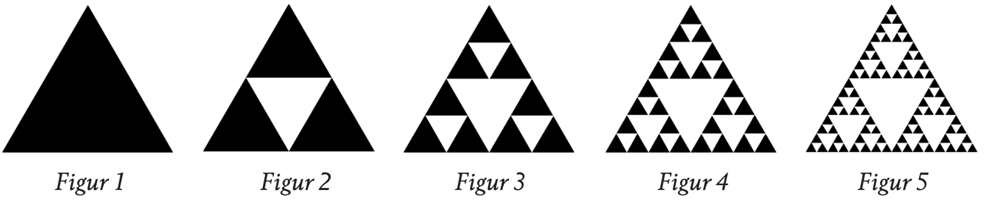
Figur 3



Figur 4



Figur 5



3. Figurerna ovan visar sierpinskitriangeln.

a) Bestäm antalet svarta trianglar i den 10:e och den n:te figuren.

b) Bestäm antalet vita trianglar i den 10:e och den n:te figuren.

4. Studera hur fraktalen till höger är konstruerad.

a) Ange ett allmänt uttryck a_n för antalet enhetssträckor i figur n.

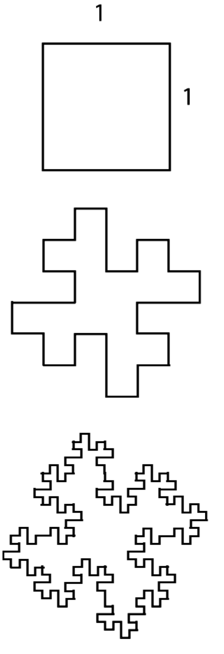
b) Ange längden av en enhetssträcka i figur n.

c) Vilken figur består av 8 388 608 enhetssträckor?

d) Ange ett allmänt uttryck L_n för fraktalens längd.

e) Jämför a_5 och L_5. Varför är a_5 mycket större än L_5?

f) Vilken figur är 8 388 608 längdenheter lång?



Georg Cantor 1845 – 1916

Helge von Koch 1870 – 1924

Waclaw Sierpinski 1882 – 1969

Foton finns på:

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cantor.html

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Koch.html

www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Sierpinski.html