ANDERS PALM

Missuppfattningar i algebra

problem för läraren eller eleven?

Elevers kunskaper i algebra vid övergången från grundskola till gymnasieskola är ett område som diskuteras flitigt. Författaren, som är matematiklärare på gymnasiet, tycker sig se samma missuppfattningar år från år. Författaren redogör för några vanligt förekommande missuppfattningar samt hur de kan uppfattas beroende på vilken didaktisk utgångspunkt lärare har.

Efter att ha undervisat på kurserna Matematik A och Matematik B ett flertal gånger har jag börjat reflektera över de varierande förkunskaperna eleverna har med sig från grundskolan och då framför allt inom algebra. Jag tycker mig märka att vissa missuppfattningar i matematik hos elever som kommer från årskurs nio ser likadana ut år efter år, framför allt när det gäller algebraiska räkneoperationer.

Detta har gjort mig nyfiken. Vad är det eleverna inte förstår, varför förstår de inte detta och hur ger de uttryck för det?

För att ytterligare analysera den här typen av missuppfattningar har jag gjort en fältstudie med 60 elever som läser Matematik B i årskurs 1 på det naturvetenskapliga programmet. Arbetet med analysen mynnade ut i en B-uppsats vid Lärarhögskolan i Stockholm våren 2006.

Missuppfattningarna har betraktats ur ett behavioristiskt och ett konstruktivistiskt perspektiv. Uppsatsen gör inte anspråk på att förklara alla missuppfattningar och inte heller erbjuder den någon entydig undervisningsmetod som verksamma

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2+x} = \frac{x^3}{1} + \frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x} = x^3+2+1 = x^3+3$$

$$+x \qquad\qquad \cdot x^2$$

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-x} = \frac{x^4+2x^3-x^2}{x^2} = x^6+2x^5+x^2$$

Några typexempel på missuppfattningar som återkommer år efter år och som jag betecknar som vanliga.

lärare kan använda för att eliminera dessa missuppfattningar. Dock ges några förslag hämtade från forskning och litteratur kring hur lärare kan bemöta och bättre förstå missuppfattningar hos sina elever.

Olika teorier

Lärare är till sin natur praktiska och vill ha en undervisningsmetod som leder till största möjliga kunskapsinhämtning hos eleverna på kortast möjlig tid. Dewey hävdar dock att ”in the end, there is nothing as practical as a good theory” (Olivier, 1989). Som lärare behöver man alltså ha en teori att sätta sina iakttagelser om elevernas prestationer i relation till. Allt lärare gör i klassrummet gör de, medvetet eller omedvetet, mot bakgrund av en teori. Olika lärare tillämpar olika undervisningsmetoder och förhåller sig därför till elevernas fel och missuppfattningar på olika sätt. Det är således viktigt att som lärare bli medveten om vilken teori man använder sig av för att på bästa sätt kunna erbjuda adekvat undervisning.

Två didaktiska huvudteorier under det senaste århundradet är behaviorismen och konstruktivismen. Behaviorismen intresserar sig för mätbara data som kan observeras helt objektivt. De två principer som ligger till grund för inlärningsteorin är dels att uppgiften analyseras noggrant, dels att den lärande ska få förstärkning. Från denna inlärningsteori kommer (det förenklade och något missuppfattade) uttrycket ”repetition är all inlärnings moder” och syftar på att lärande och undervisning sker genom gedigen träning på ett visst moment.

Enligt behaviorismen är misstag och missuppfattningar hos elever inget stort problem för läraren. Eftersom teorin inte tar hänsyn till den rådande kunskapen om ett begrepp eller ett problem när ny kunskap skall läras in, ser teorin snarare misstag och ”räknefel” som en liten ”bugg” i ett datorprogram. Gör en elev fel, kan läraren helt enkelt rätta till den ”buggen” genom att tala om för eleven hur det skall vara i stället. Gagne sammanfattar ”missuppfattningar” enligt behaviorismen som

> *The effects of incorrect rules of computation, as exhibited in faulty performance, can most readily be overcome by deliberate teaching of correct rules* [...] *This means that teachers would best ignore the incorrect performances and set about as directly as possible teaching the rules for correct ones.*
>
> (Olivier, 1989)

Konstruktivismen är en gren inom kognitivismen. Konstruktivismen bygger på idén att individen konstruerar sin kunskap. I grunden handlar det om Piagets, men kanske framför allt Vygotskijs tankar om inlärning och kunskap. Piaget menar att kunskap kan konstrueras av en individ oberoende av andra, medan Vygotskij hävdar att kunskap måste skapas i samverkan med andra. Piaget företräder således en individualistisk konstruktivism (Hägnesten, 2003) och för honom är kunskapen aldrig en avbildning av den verkliga världen. Den är istället en uppsättning begreppsliga strukturer som visar sig vara livsdugliga inom räckvidden för det lärande subjektets erfarenheter (Engström, 1998).

En vanlig förenkling och missuppfattning av konstruktivismen kan uttryckas som ”En människa kan inte lära en annan människa någonting” vilket syftar på grundtanken att kunskap inte är objektiv och därför inte kan överföras i oförstörd form från en människa till en annan. Tvärtom är det viktigt att eleven har en kompetent lärare, som kan peka ut riktningen för vad hon skall leta efter då hon söker ny kunskap, snarare än att denne agerar passiv handledare. En aktiv lärare är särskilt viktig i en konstruktivistisk skola (Unenge, Sandahl & Wyndhamn, 1994).

Enligt konstruktivismen kan fel och missuppfattningar hos elever få en avgörande betydelse. Konstruktivister menar nämligen att en tidig missuppfattning fortplantar sig till nya begrepp (Olivier, 1989). Därför är det av vital betydelse att som lärare tidigt uppmärksamma dessa missuppfattningar hos eleverna och se till att de korrigeras så fort som möjligt.

Ytinlärning

Begrepp som assimilation och ackommodation är centrala inom konstruktivismen och går i korthet ut på att varje nytt kunskapsstoff som en elev skall ta till sig måste sättas i relation till den kunskap eleven redan har.

Passar kunskapen väl in i det begreppsmönster eleven besitter kan det nya stoffet assimileras, men passar inte det nya stoffet in i den befintliga kunskapsmassan måste eleven första ackommodera sin bild av begreppet eller sin tidigare kunskap för att få pusselbitarna att passa ihop. Lärarens roll är att skapa situationer där elevens tidigare kunskap hamnar i konflikt med nya erfarenheter, så att möjlighet till assimilation och ackommodation ges – så kallade kognitiva konflikter.

Ibland stöter eleven på kunskap som hon inte tycker passar in någonstans i det befintliga kunskapsschemat. Eleven måste då (temporärt) förvara det nya stoffet i en isolerad ”box” till dess att hon kan assimilera eller ackommodera det. Så länge kunskapen är isolerad är den ytinlärd och därför svår att komma ihåg.

Övergeneralisering

Begreppet övergeneralisering innebär att elever använder en algebraisk räkneoperation i ett sammanhang där den inte är tilllämpbar. Ett vanligt exempel (Wagner & Parker, 1993) är att förenkla

$$(x+y)^2=x^2+y^2$$

genom att följa mönstret från

$$(x\cdot y)^2=x^2\cdot y^2$$

I de flesta fall är det ett både korrekt och nödvändigt antagande att det går att generalisera över tal, det vill säga förutsätta att en metod gäller oavsett vilka siffror eller räkneoperationer som används. Problemet är att generalisering allt för ofta fungerar och elever riskerar därmed att inte se begränsningarna för vissa metoder utan istället övergeneralisera.

Resultat

I fältstudien framkom långt fler missuppfattningar än jag på förhand kunnat föreställa mig. Ur ett konstruktivistiskt perspektiv kan dessa bland annat hänföras till övergeneralisering, ytinlärning och rena gissningar. Jag tar här upp ett par resultat som är särskilt intressanta.

Övergeneralisering

I omskrivningen

$$\frac{2+x}{x}=2$$

har eleven strukit ett x både i täljaren och i nämnaren, vilket hade varit korrekt vid multiplikation, men blir fel vid addition. Vi kan alltså anta att eleven inte gör någon skillnad på metodens tillämpbarhet vid addition eller multiplikation, utan övergeneraliserar.

Lösningen

$$\frac{12\cdot 2x}{2}=6x$$

är ett mycket tydligt exempel på övergeneralisering där eleven också i sin motivering uttrycker sin missuppfattning genom ”jag delar båda med 2”. Detta vore korrekt vid addition, men stämmer inte vid multiplikation.

Ytinlärning

Lösningarna

$$\frac{2+x}{x}=\frac{x\cdot(2+1)}{x}=\frac{2+1}{1}=3$$

och

$$\frac{y+3}{3}=\frac{3\cdot(y+1)}{3}=\frac{y+1}{1}=y+1$$

är misslyckade försök att faktorisera.

Vid

$$\frac{12\cdot 2x}{2}=\frac{12}{2}\cdot\frac{2x}{2}=6x$$

syns det tydligt att eleven inte kan skilja på faktorer och termer, och inte vet att det råder olika algebraiska regler för dessa båda typer. Lärare med en konstruktivistisk inlärningsfilosofi kan här se en koppling till den isolerade ”boxen”.

Även lösningen

$$\frac{y+3}{3}=\frac{(y+3)\cdot 3}{3}=y+3$$

är av denna typ.

Lösningen

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{4}}{\frac{x}{3}}=(\frac{x}{2}+\frac{x}{4})\cdot\frac{3}{x}=\frac{3x}{2x}+\frac{3x}{4x}=\frac{6x}{6x}=1$$

är särskilt intressant. Eleven gör korrekta algebraiska operationer fram till det näst sista steget. Där blir

$$\frac{3x}{2x}+\frac{3x}{4x}=\frac{6x}{6x}$$

vilket tyder på att eleven tror att den regel som är korrekt vid multiplikation, även är tillämpbar vid addition. Men i motiveringen visar eleven tydligt att han är osäker. ”Oj, vad gjorde jag? Vet inte, hoppas det är rätt”. Han upplever en kognitiv konflikt, och rimligtvis innebär detta att han har haft kunskapen i sin isolerade ”box” men nu är på väg att assimilera eller ackommodera den nya kunskapen.

Lösningen

$$\frac{4x}{2+2x}=0$$

är också intressant. Eleven föreslår 0 som resultat av en kvot, utan att vidare kommentera att kvoter aldrig kan bli 0, såvida inte täljaren är 0 vilket inte är fallet i detta exempel, och att det därför borde finnas någon lucka i lösningen.

Diskussion

Jag anser att algebra är för matematik vad grammatik är för språk. Utan en god kunskap i grammatik kan man aldrig bli riktigt duktig på ett främmande språk, varken muntligt eller skriftligt. Visst kan man göra sig förstådd, men då handlar det mer om enklare sammanhang och oftast muntligt. I matematik är det samma sak – utan gedigna kunskaper i algebra kommer man aldrig att få tillgång till de kraftfulla verktyg den kan erbjuda som hjälp vid problemlösning och djupare matematisk förståelse.

Ändå tycks det vara i just algebra som elever har de största bristerna och missuppfattningarna. Beror det på problem med algebra eller problem att förstå undervisningen i algebra? Är det så att vi lärare kraftigt underskattar svårigheterna med algebra eller erbjuder vi bara bristfällig undervisning?

Kanske underskattar vi elevernas förmåga att ta till sig algebraiska resonemang och symbolisk notation. Det är inte förrän på högstadiet som algebran introduceras ordentligt och eleverna får undervisning i ekvationslösning och algebraiska räkneoperationer. En risk finns då att eleverna ser algebra som ”en del” av matematiken, på samma sätt som procent, bråkräkning och geometri, och inte som ett fundament för all matematik. Precis som att aritmetiken genomsyrar all matematik på ett naturligt sätt borde vi sträva mot att även införliva algebran så tidigt och så ofta som möjligt för att på så sätt minska rädslan och mystiken kring den.

> *If algebraic notation could be viewed by the middle school students as a natural way of expressing what is sensible in arithmetic, we as teachers would be building a strong foundation not only for the understanding of algebra but for mathematics in general.*
> (Kieran & Chalouh, 2004)

Hur kan vi undervisa?

Ett stort problem är förstås hur man skall lägga upp sin undervisning för att undvika de missuppfattningar hos eleverna som fältstudien visar på. Alla som arbetar som lärare på grundskolans senare år eller på gymnasiet, vet att de inte är lätta att komma tillrätta med. Bagni (2000) menar att det är av stor vikt att lärare använder sig av motexempel (counterexamples) för att göra eleverna uppmärksamma på olika metoders begränsningar. Man kan till exempel påminna eleverna om Pythagoras sats

$$a=\sqrt{b^2+c^2}$$

för att visa att

$$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{b^2}+\sqrt{c^2}=b+c$$

inte kan vara en korrekt regel för rotuttryck. Resultatet skulle ju i så fall bli att den längsta sidan i en triangel är summan av de övriga två, något som är uppenbart osant. Han pekar dock ut detta som en otillräcklig insats.

> *Nevertheless, we cannot say that the use of counterexamples is always conclusive; the effect of counterexamples with students is often weak since they are not able to interpret given counterexamples in an adequate way.*
> (Bagni, 2000)

Ett sätt att hjälpa elever att komma till rätta med svårigheterna att skriva om uttryck som t ex $(x+3)/x$ och $(6x\cdot 3)/3$ är att konfrontera dem med olika uttryck samtidigt och be dem reda ut likheter och skillnader, samt motivera varför de måste hanteras olika.

> Skriv om (förenkla) följande två uttryck, $(x+3)/x$ och $(x \cdot 3)/x$.
> Redogör för likheter och skillnader.
>
> Skriv om (förenkla) följande två uttryck, $(6x \cdot 3)/3$ och $(6x+3)/3$.
> Redogör för likheter och skillnader.

En variant är att formulera uppgifterna enligt nedan. Det är ofta enklare att diskutera "någon annans fel" än sina egna. Flera läromedel på marknaden innehåller också just denna typ av uppgifter, där ambitionen är att eleverna skall reflektera över olika lösningsförslag på samma uppgift.

> Kalle och Lisa har båda förenklat ett uttryck, $(x+3)/x$, men fått olika svar.
> Kalle: $(x+3)/x = 1+3/x$
> Lisa: $(x+3)/x = 3$
> Vem har fått rätt svar och varför?
>
> Kalle och Lisa har båda förenklat ett uttryck, $(6x \cdot 3)/3$, men fått olika svar.
> Kalle: $(6x \cdot 3)/3 = 2x+1$
> Lisa: $(6x \cdot 3)/3 = 6x$
> Vem har fått rätt svar och varför?

Som ytterligare fördjupning kan man erbjuda eleverna flera korrekta förslag och se om de kan identifiera att lösningarna faktiskt är lika. Kan de till exempel se att $(2+x)/x$ kan skrivas båda som $2/x + x/x$ och som $2/x+1$?

Undervisningmetoden viktig

Då detta är en mycket avgränsad undersökning, utförd enbart på en skola och ett nationellt program, kan generaliserade slutsatser inte dras. Men då undersökningen är utförd på det naturvetenskapliga programmet, som rimligtvis borde locka till sig de elever som har störst fallenhet och/eller intresse för matematik, kan man anta att elever på gymnasieskolans övriga program har åtminstone samma missuppfattningar, om inte ännu fler.

Tolkningen av elevmisstag och de korrigeringar läraren därmed behöver göra, blir konsekvenser av den teori läraren använder sig av i sin undervisning. En viktig slutsats från TIMSS videostudie 1999 är att undervisningsmetoden, och inte läraren, är den avgörande faktorn för elevernas möjlighet att lära sig matematik. Läs mer på nces.ed.gov/timss/. Bland annat konstateras att:

> *Although variability in competence is certainly visible in the videos we collected, such differences are dwarfed by the differences in 'teaching methods' that we see across cultures.*
>
> *We have watched many examples of good teachers employing limited methods that, no matter how competently they are executed, could never lead to high levels of student achievement. Although there are teachers using extraordinary methods in all cultures, the extraordinary is not what defines most students' classroom experiences.*
>
> (Stigler & Hiebert, 1999)

LITTERATUR

Bagni, G. (2000). *"Simple" rules and general rules in some high school student's mistakes.* Dep. of Mathematics, University of Roma.

Engström, A. (red) (1998). *Matematik och reflektion.* Lund: Studentlitteratur.

Hägnesten, T. (2003). *Matematikscreening II – studium av ett kartläggningsinstrument relaterat till teoribildning, lärandeprocesser och styrdokument.* Institutionen för individ, omvärld och lärande, Lärarhögskolan i Stockholm.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. I D. Owens (red), *Reserach ideas for the classroom: middle grades mathematics* (s 179–198). Reston: NCTM.

Olivier, A. (1989). *Handling pupil's misconceptions.* Department of Didactics, University of Stellenbosch.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* New York: The Free Press.

Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994). *Lära matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Wagner, S. & Parker, S. (1993). Advancing algebra. I P. Wilson (red), *Reserach ideas for the classroom: high school mathematics* (s 119–139). Reston: NCTM.

De algebraiska uppgifterna från fältstudien tillsammans med hela uppsatsen finns att ladda ner på www.anderspalm.net/Skolfolk/information.php