

började med derivata och dylikt. Då insåg Mats behovet av säker kunskap i algebra — varefter allt gick snabbt att träna in. Motivet var tydligt.

- En duktig elev har inte självklart alltid rationella tankeformer. Redan mitt första möte med Mats visade detta då han räknade $4 \cdot 597$ och genom att börja med 4 gånger 9 "för nio är störst, så är jag av med det". Tvärtom gäller utifrån erfarenheten med Mats, att just hans räkesäkerhet och minneskapacitet gjorde att det som egentligen var omvägar och/eller orationella tankeformer inte var besvärande för honom (men väl för mig som hade svårt

att hänga med . . .). Aha-upplevelsen var tydlig just i nämnda multiplikation, när jag visade på möjligheten, att ta $4 \cdot 600$: *Då är det ju ingen konst att räkna!*

Slutsats

Skall vi satsa på högpresterande elever gäller det inte "att bara sysselsätta dem". Det gäller att stimulera dem, men det gäller också och kanske framför allt att få tid att diskutera med dem och därmed få dem att effektivt utnyttja sin kapacitet. Klarar vi det, kanske vi bättre slår vakt om begåvningar, som kan bli en viktig resurs både under skoltiden och senare!

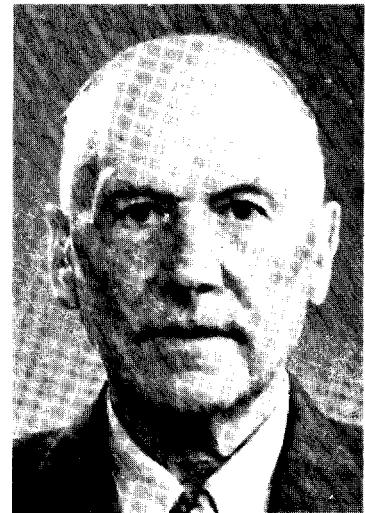
Sveriges första forskare i matematikdidaktik

I denna artikel av Nämnaren 3 85/86 berättar *Bengt Johansson* om K G Jonssons arbete i början av 1900-talet. Vad kan man lära av detta arbete?

Vem var K G Jonsson?

Karl Gustav Jonsson¹⁾ föddes i Vista by, Österfärnebo socken, år 1879. Som 14-åring arbetade Jonsson som landbonde bl a med att vakta korn. Han flyttade så småningom till Stockholm, där han tog anställning som byggnadsarbetare. Parallellt med sitt arbete läste K G Jonsson in de delar som krävdes för att komma in på folkskollärarseminariet i Uppsala. Efter folkskollärarexamen tog han några år senare studentexamen i Uppsala som privatist. Han tjänstgjorde först som folkskollärare, sedan som seminarielärare och slutligen som rektor vid Strängnäs seminarium. 1919 disputerade K G Jonsson vid Uppsala universitet på avhandlingen *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*. Han skrev också en räknelära för den grundläggande matematikundervisningen. Karl Gustav Jonsson blev mycket gammal. Han avled så sent som 1981, nästan 102 år gammal!

1) Jag vill rikta ett varmt tack till Urban Dahllöf och Thomas Kroksmark som gjort mig uppmärksam på Jonssons arbeten.



Hur tänker eleverna när de räknar?

"Den intresserade läraren lägger säkert vid räkneundervisningen märke till flera olika tillvägagångssätt vid huvudräkning — även om uppgiften, exemplet, är ett och samma — hos olika individer. Nu är det ju så att förfarandet även kan växla hos samma individ, ehuru uppgifterna är tämligen likartade. Men ofta händer, särskilt på vissa områden av huvudräkningen, att förfaringsättet formar sig att bli tämligen enahanda."

Så inleder K G Jonsson sitt *Bidrag till räkningens psykologi och metodik* i Svenskt Arkiv för Pedagogik, 1915. Jonsson redogör här för en undersökning om hur elever tänker när de löser uppgifter av typen $27 + 36$ och $84 + 79$ i huvudet, d v s additionsuppgifter som innehåller tiotalsover-

gångar. Att han valde just dessa uppgiftstyper för sina huvudräkningsstudier motiverade han med att lättare uppgifter av typen $20 + 36$ var för enkla för att kunna ge en intressant variation. Svårare uppgifter av typen $387 + 496$ uteslöt han p g a att de sällan förekommer i samband med huvudräkning. Valet av uppgifter skall också ses mot bakgrunden av att Jonsson var intresserad av elevernas tänkande i olika åldrar och därför inte ville välja uppgifter som flertalet elever redan automatiserat eller som var allt för svåra för de yngre eleverna.

Genom att intervjua flera hundra elever från 7—8-årsåldern upp till vuxen ålder fann Jonsson att elevernas tänkande i huvudsak kunde sammanfattas i tre kvalitativt skilda förfaringsätt. Han beskrev de olika förfaringsätten med hjälp av exemplet $38 + 57$:

U — Utfyllnadstypen:	$38 + 2 = 40$
	$57 - 2 = 55$
	$40 + 55 = 95$
VI — Vanliga typen I:	$38 + 50 = 88$
	$88 + 7 = 95$
VII — Vanliga typen II:	$30 + 50 = 80$
	$8 + 7 = 15$
	$80 + 15 = 95$

Utfyllnadstypen, U var ganska ovanlig medan *Vanliga typen II*, VII förekom något oftare än *Vanliga typen I*, VI. Några "rena" huvudräkningstyper fann han inte men han kunde konstatera att försökspersonerna "företrädesvis använde sig av ett och samma eller åtminstone likartat förfaringsätt".

Jonsson lät alltså sina försökspersoner berätta hur de tänkte när de räknade. Lättast var det att intervjua vuxna försökspersoner. Här är ett exempel på hur en av personerna svarade när det gällde ($35 + 29$):

"Tänkte att nu blir det nog en så lätt uppgift, att det ingen egentlig räkning blir. Tänkte på talet 120. När så uppgiften kom, tänkte jag, att det i alla fall blev en lätt uppgift. Tänkte genast svara 64; var dock inte riktigt säker på om det blev 54. Räknade så:

$$30 + 20 = 50; 50 + 14 = 64$$

14 uträknades aldrig utan låg liksom i bakhåll från början, för att rycka fram, när det behövdes. Utsade 64. Tyckte efteråt, att det var för lång tid för ett så lätt tal" (Tid: 9 s)

Intervjuerna var betydligt svårare att genomföra med de yngre försökspersonerna. Jonsson kon-

staterade att "utsagorna blevo här naturligtvis mycket magrare. Först genom utfrågning efter detta "spontana" berättande — utfrågningen måste ju göras mycket försiktigt för undvikande av suggestiv inverkan från försöksledarens sida — blev det hela lite fylligare".

Jonsson ställde sig frågan varför så få elever använder sig av *Utfyllnadsmetoden* och så många elever använder sig av de båda övriga metoderna. Efter att i detalj ha analyserat *antalet* deloperationer som behövs i de olika förfaringsätten kunde han inte finna att detta skulle vara orsaken till att eleverna föredrar *Vanliga typen I och II* före *Utfyllnadstypen*.

Hur snabbt och säkert utförs de olika deloperationerna?

Passar då inte *Utfyllnadsmetoden* för barnen, frågade sig Jonsson. Är det en svårframkomligare väg och beror det på att *Utfyllnadsmetoden* mitt i all addition kräver en subtraktion ($57 - 2$)? Och varför håller vissa elever envist fast vid *Utfyllnadstypen* medan andra självmant går över till de andra typförfarandena? Beror det t ex på deloperationernas karaktär eller på graden av automatisering av de ingående deloperationerna? För att försöka få svar på sina frågor valde Jonsson ut en grupp på 12 personer, uppdelade på tre åldersgrupper. I var och en av de tre åldersgrupperna ingick 2 personer av U-typ, en av VI-typ och en av VII-typ:

4 barn i 8-årsåldern (åk 2)
4 barn i 13—14-årsåldern (åk 4)
4 vuxna

För att undersöka *sambandet mellan förfaringsätt och graden av automatisering av de ingående deloperationerna* genomförde Jonsson en omfattande och tekniskt mycket sinnrik studie av hur *snabbt och säkert* de olika försökspersonerna klarar dessa deloperationer. Samtliga försökspersoner testades på samtliga förekommande deloperationer, d v s även sådana som förekommer i de förfaringsätt som de inte själva spontant hade använt vid huvudräkningen. Totalt undersökte Jonsson 6 typer av deloperationer:

$8 + 7$
 $40 + 50$
 $27 + 3$
 $48 - 3$
 $60 + 15$
 $68 + 9$

De resultat han kom fram till kan sammanfattas på följande sätt:

$$8 + 7$$

Här fann Jonsson relativt stora skillnader mellan olika uppgiftstyper, framför allt bland de yngre

försökspersonerna. Lättast var de kombinationer som innehåller +1 och +2 samt "dubblor" (typ 8 + 8). Därefter kom uppgifter av typen "dubbelt ±1" (typ 8 + 7). De försökspersoner som använt *Utfyllnadsmetoden*, behövde genomgående längre betänketid. Jonsson konstaterade också att "mekaniseringen, även om den verkligen förefinnes, är olika långt driven".

40 + 50

Resultaten överensstämmer i stort sett med resultaten för motsvarande entalsaddition. Endast 8-åringarna behövde något längre betänketid. Vissa försökspersoner, speciellt de äldre, adderade t o m tiotalen snabbare än motsvarande ental. Lättast var 50 + 50. Sedan kom uppgifter vars summa är högst 90. Och liksom för entalen var det lätt med +10, +20 och "dubbelt".

27 + 3

Denna uppgiftstyp krävde i genomsnitt kortare tid än de båda föregående. Snabbast var de försökspersoner som använde U-typen. Lättast var uppgifter av typen 25 + 5, 19 + 1 och 18 + 2, d v s uppgifter med entalsadditionen 5 + 5 och uppgifter med +1 och +2. Uppgifter av typen 41 + 9 tog avsevärt längre tid.

48 - 3

Här behövde eleverna längre betänketid än för de föregående deloperationerna. Lättast var det med -1 och -2. Uppgifter av typen 48 - 7, där differensen mellan entalen var 1 eller 2 kom därefter. Svårast var uppgifter av typen 48 - 5.

60 + 15

Här förekom stora skillnader mellan de olika åldersgrupperna. Uppgiftstypen var genomgående svårare än de föregående. De försökspersoner som tillhörde *de vanliga typerna* hade kortare betänketid än de som tillhörde *utfyllnadstypen*. De uppgifter som började med helt tiotal var enklare än de övriga. 40 + 37 var alltså lättare än 37 + 40.

68 + 9

Denna uppgiftstyp var svårast av samtliga de deluppgifter som Jonsson undersökte. Skillnaderna mellan de olika åldersgrupperna var också störst här. De försökspersoner som använde *Vanliga typen I* hade dock en förhållandevis liten ökning av betänketiden.

Varför föredrar man ett förfaringssätt framför ett annat?

Efter denna mycket omfattande studie summerade Jonsson tiderna för de olika deloperationerna så att han för varje försöksperson fick en totaltid

för vart och ett av de tre förfaringssätten U, VI och VII, alltså även för de förfaringssätt som försökspersonerna inte spontant hade använt. Han konstaterade:

"Summan av tiderna för de deloperationer, som ingår i de respektive försökspersonernas tillvägagångssätt, är mindre än varje annan tidssumma för de deloperationer, som ingår i de andra typerna. D v s varje försöksperson använder den väg, som för honom är den lättaste, den bäst framkomliga, där minsta motståndet möter, där mekaniseringen är mest genomförd och minsta tiden krävs".

K G Jonsson jämförde också skillnaden mellan akustisk och optisk delgivning av de olika huvudräkningsuppgifterna och dessutom vad som händer om man försöker få eleverna att byta förfaringssätt. Han sammanfattade:

"Sammanfattas nu i korthet det föregående, framgår tydligt, att försökspersonerna vid såväl akustiskt som optiskt delgivningssätt, tämligen noggrant följa sitt speciella förfaringssätt, även om vissa avvikelser därifrån ibland förekommit, då mest hos de minst rena typerna. Räklandet är i regel betydligt lättare vid optisk delgivning än vid akustiskt. Vidare är för varje försöksperson hans speciella räknesätt det för honom lättaste sättet att komma fram, tar minsta tiden i anspråk. Som av de sista försöken framgår kan dock genom särskild övning försökspersoner gå över från ett typförfarandet till ett annat, även om detta vållar svårigheter och särskild viljeanstängning i början, samt att de till U-typen hörande t o m vunnit bättre resultat med annat förfarande än sitt eget, och att vid optiska delgivningen VII tycks vara den lättaste".

De försökspersoner som tillhörde VI- eller VII-typen fick emellertid betydligt sämre resultat när de tvingades byta typförfarande. Försöken med "typväxling" gjordes även med de yngre försökspersonerna *"men när dessa hade synnerligen svårt att hålla sig kvar på ett annat typförfarande än sitt eget ha resultaten ej medtagits."*

Hur ser sambandet ut mellan förfaringssätt och undervisning?

I den grundläggande additionsundervisningen fick eleverna under tiden för Jonssons undersökning, liksom i de flesta räkneläror fram till våra dagar, nästan uteslutande arbeta med utfyllnad. 8 + 7 löstes t ex genom

$$8 + 2 = 10$$

$$7 - 2 = 5$$

$$10 + 5 = 15$$

Borde då inte flertalet elever utnyttja ett sådant förfaringssätt, undrade Jonsson.

”Man kan då ha anledning att tro, att av dessa så dagligen undervisade barn skulle åtminstone de allra flesta framgent använda sig av sådan utfyllnad. Så är emellertid inte förhållandet. Det är ju rätt svårt att få fatt i sådana räknetyper. I en klass (andra skolåret) på 15 barn, såväl gossar som flickor, där jag haft tillfälle att dagligen följa undervisningen användes vid huvudräkning i addition utfyllnad regelbundet. Så tillhöllos ej barnen längre att använda ett visst förfaringssätt, de fingo uträkna exemplen på sätt, de funno för gott. Under tiden inlärdes skriftlig räkning. Vid efter denna tid företagen undersökning då samtliga fingo redogöra för sitt tillvägagångssätt befanns att *endast ett barn* något så när fullständigt fasthöll vid U-typen. Alla de övriga hade övergått till VI eller VII eller också, vilket var vanligast, förforo de precis som vid skriftlig räkning.”

”Förhållandet visar att förfaringssättet enligt U-typen mycket litet praktiseras så snart barnen ej *tvingas* att använda den. Inlärnings-sättet torde således för dessa försökspersoner i stort sett ej ha haft allt för stor inverkan.”

Hur tänker eleverna i de övriga räknesätten?

Jonsson studerade också huvudräkning i subtraktion och i begränsad omfattning även multiplikation och division. Men det empiriska materialet blev så omfattande och komplext att Jonsson här, med den arbetsinsats som var möjlig, inte lyckades göra motsvarande beskrivningar som i addition. Liksom samtida tyska matematikdidaktiker (t ex E Meumann och B Schanoff) konstaterade



Jonsson att elevernas tänkande inte kunde sammanfattas i enkla kategorier, även om man håller sig till ett och samma räknesätt. Störst respekt fick Jonsson för svårigheterna att beskriva elevernas tänkande i division:

”Mycket mindre enhetlig verkar divisionsprocessen. Multiplikation och addition, sporadiskt även subtraktion, tråda samman till ett komplex. *Men ingen enkel regel ordnar dessa komplex.*

Jag hoppas att jag med detta bidrag från den svenska matematikdidaktikens historia har övertygat Nämnares läsare om vikten av att ta till vara guldkornen från flydda dagar.

Titta på s.10 i Nämnares 3 85/86

Mer om guldkorn från flydda dagar

På grund av en lång rad olyckliga omständigheter lyckades man under 1960-talet i vårt land bryta ner och förstöra en mycket lång tradition av matematikdidaktiskt forsknings- och utvecklingsarbete (Magne 1968, Lindström 1968, Kilborn 1977). Arbeten av sådana personer som K P Nordlund (1867, 1890, 1910), F W Hultman (1868, 1868—71, 1874), G Elowson (1868), B Rollin (1889), K G Jonsson (1915, 1917, 1918, 1919), C Lönnkvist (1916), F Wigforss (1925, 1931, 1932, 1933, 1934, 1938, 1939, 1946, 1950, 1956), L G Sjöholm (1929, 1949), C G Hellsten (1926, 1937), E Vanäs (1955), E Ferner (1955) och S Lindström (1933, 1945, 1968) var okända eller sågs som ett hinder i utvecklingen när den s k nya matematiken trängde sig fram. På några få år sopade man bort de erfarenheter som vunnits under de närmast föregående 100 årens forskning och utvecklingsarbete kring hur man lär svenska barn räkna och lösa problem.

På Nämnares redaktionens önskan har jag här gjort ett subjektivt urval av litteratur, som jag rekommenderar intresserade läsare!