Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare

Morten Blomhøj

Här behandlas hur ett didaktiskt kontrakt utvecklas och vilka konsekvenser detta har för arbetet i en klass. Sedan följer en redogörelse för ett utvecklingsarbete i geometri genomfört i en avslutningsklass i en dansk folkskola. I artikeln illustreras hur samspelet mellan elev och lärare kan förklaras utifrån innehållet i det didaktiska kontraktet. I anslutning till artikeln ges några exempel på svenska att pröva i egen klass.

Indledning

I enhver form for institutionaliseret undervisning, hvor den samme lærer underviser den samme klasse i samme fag i årelange forløb, opbygges et særligt forhold mellem læreren og eleverne i deres fælles møde med faget i skolen. Dette forhold kan beskrives metaforisk ved at sige, at der etableres en *didaktisk kontrakt* for undervisningen. En kontrakt der danner rammerne for virksomheden både i klassen som helhed, men også for samspillet mellem læreren og de enkelte elever og mellem eleverne indbyrdes.

Begrebet didaktisk kontrakt blev introduceret af den franske matematikdidaktiker Guy Brousseau omkring 1980 (Brousseau, 1984) i et forsøg på at udvikle et begrebssystem, der kunne beskrive de gensidige opfattelser, holdninger og forventninger hos lærere og elever, der er karakteristisk for en undervisningssituation i matematik (en didaktisk situation).

En sådan didaktisk kontrakt vil nødvendigvis være stærkt præget af de institutionelle rammer: love, bekendtgørelser, eksamener m.v.; men måske i endnu højere grad af den enkelte lærers opfattelse af faget, af det at undervise og af elevernes forventninger til undervisningen i netop det fag. Man kan sige, at etableringen af en didaktisk kontrakt er udtryk for, at enhver lærer sammen med sin klasse må søge en balance mellem alle disse mange forskellige opfattelser, forventninger og krav. Hvis ikke der skabes en eller anden form for kontrakt mellem lærer og elever, kan undervisningen simpelthen ikke gennemføres. Etableringen af en didaktisk kontrakt er således ikke blot en følge af undervisningen, men også en nødvendig forudsætning for den. Omvendt virker den didaktiske kontrakt – ved eksplicit, men først og fremmest implicit at sætte rammer for den daglige undervisning – i det lange løb tilbage på lærerens opfattelse af faget, af eleverne og af det at undervise samt på elevernes opfattelse af faget og deres holdning til læring.

Udvikling af den didaktiske kontrakt

I al matematikundervisning har læreren nogle mere eller mindre klare intentioner om, hvilken matematisk viden elverne skal tilegne sig. Ofte er disse fulgt af et ønske om, at tilegnelsen skal være af en sådan karakter, at eleverne kan bruge deres matematiske viden – også i situationer, der er nye for dem. Det er efterhånden alment accepteret, – både som erfaringsmæssig kundskab og som teoretisk position – at uanset hvad eleverne tidligere har lært af

Morten Blomhøj *är PhD i matematikens didaktik och arbetar vid Roskilde Universitet.*

matematik, er en sådan tilegnelse kun mulig, hvis elverne selv er matematisk aktive på den ene eller anden måde. Som lærer må man tilrettelægge situationer og vælge eller udvikle problemer, der kan give grundlag for elevaktiviteter, som er relevante for tilegnelsen af den pågældende matematiske viden. Men som enhver lærer ved, vil der – uanset hvor gennemtænkt undervisningen er tilrettelagt – være nogle elever, der ikke umiddelbart har forudsætninger (kognitive og/eller affektive) for at engagere sig i de relevante aktiviteter. I sådanne situationer har læreren en social og professionel forpligtelse til at hjælpe eleverne. Læreren forventes at kunne skabe faglige forudsætninger og socialpsykologiske betingelser, der er tilstrækkelige for elevernes tilegnelse af ny matematisk viden og han/hun må være i stand til at afgøre, hvornår eleverne har tilegnet sig den pågældende viden. Eleverne forventes på deres side at gøre, hvad de kan for at opfylde de krav, der stilles til dem.

Hvis tilegnelsen ikke finder sted som tilsigtet, kan man (læreren, eleven selv, forældrene,...) klandre eleven, at eleven ikke har gjort, hvad der med rette kunne forventes af ham/hende. Men også læreren kan bebrejdes (af sig selv, af eleven, af forældrene eller kolleger), at han/hun ikke har levet op til sin professionelle forpligtelse. Det afhængighedsforhold mellem læreren og eleverne, bevirker, at både lærer og elev har en stærk tilskyndelse til at lykkes med det fælles projekt: elevens læring. Jo færre frihedsgrader, i form af f.eks fysiske og tidsmæssige rammer, fagets vanskelighed og betydning, lærerens og elevernes faglige forudsætninger, pensums- og eksamensbestemmelser samt egne og omgivelsernes forventninger, der er til rådighed for samspillet mellem lærer og elever i dette projekt, jo mere vil begge parter fokusere på at undgå fiasko – det vil sige erkendelse af, at læringsprojektet er mislykket. Med dette spændingsforhold som drivkraft opbygges der i det lange løb gennem undervisningen en didaktik kontrakt mellem lærer og elever, som kan siges at udgøre en forsikring mod, at læringsprojektet ender i fiasko – i alt fald for det store flertal af eleverne.

Den didaktiske kontrakts indhold og konsekvenser

Traditionel matematikundervisning kan netop karakteriseres ved et vist fælles indhold i den didaktiske kontrakt, som indebærer;

- at læreren omhyggeligt gennemgår de metoder og algoritmer, der præsenteres i lærebogen,
- at læreren kun stiller opgaver, som eleverne påforhånd har fået redskaber til at løse,
- at en opgave er løst, når dens enkelte spørgsmål er besvaret,
- at de ønskede svar kan angives kort ved f.eks. et tal, en figur eller til nød en kort sætning,
- at eleverne har krav på lærerens bedømmelse, når en opgave er løst,
- at elevernes læring kan bedømmes alene ud fra, om de kan regne de stillede opgaver,
- at eleverne på deres side gør deres bedste for at løse destillede opgaver.

I en undervisning, der er præget af en didaktisk kontrakt med dette indhold, vil både lærer og de fleste elever ofte føle sig trygge og veltilpasse. Læreren kan efter en indledende gennemgang ved tavlen koncentrere sig om at hjælpe eleverne under opgaveregningen. Her er der mulighed for, at læreren kan differentiere sin indsats sådan, at han bruger mest tid på de elever, der har de største vanskeligheder med at regne opgaverne. Den erfarne lærer udvikler i en sådan undervisning gennem årene et helt arsenal af anvisninger og korrektioner hørende til opgaveregningen inden for fagets emner, der kan bruges til at lede eleverne på ret kurs, når de går i stå eller begår fejl på de forskellige trin i opgaveløsningen. For det store flertal af elever sikrer en sådan didaktisk kontrakt, at de i rimelig udstrækning bliver i stand til at møde de udfordringer, der stilles til dem i undervisningen – også til eksamen.

Problemet er blot, at dette langt fra er det samme som, at undervisningen lever op til intentionerne om, at eleverne skal tilegne sig matematisk viden, som de selvstændigt skal kunne anvende – også i situationer der er nye for dem. Dette skyldes bl.a. en række utilsigtede, men alvorlige virkninger af den didaktiske kontrakt. Der, hvor den didaktiske kontrakt i den traditionelle matematikundervisning sætter sig tydeligst igennem, er i dialogen mellem læreren og den enkelte elev i situationer, hvor eleven arbejder med en opgave, der er forelagt af læreren (evt. ved hjælp af lærebogen). Jo vanskeligere eleven har ved at deltage i den aktivitet læreren tilbyder, jo mere foranlediges læreren til at give konkrete og detaljerede anvisninger, på hvilke handlinger som han/hun ønsker eleven skal udføre.

I en sådan situation er eleven – i overensstemmelse med den didaktiske kontrakt – først og fremmest optaget af at honorere lærerens krav. Eleven er godt klar over, at læreren har klare forventninger til hans/hendes handlinger og at den didaktiske kontrakt indebærer, at læreren ikke kan fortælle præcis, hvad det er for handlinger han/hun forventes at udføre – for så lærer eleven jo ikke noget. Derfor vil eleven være stærkt optaget af at opfatte og fortolke lærerens signaler – både de verbale og non–verbale – for på den måde at finde ud af *om 17–tallet fra opgaveteksten nu skal stå over eller under brøkstregen*. Det overordnede motiv for eleven er altså at holde sin del af den didaktiske kontrakt og det er dette motiv – og ikke ønsket om at løse et bestemt matematisk problem – der bliver styrende for elevens læring.

Tilsvarende er læreren stærkt optaget af at opfylde sin del af den didaktiske kontrakt – det vil sige give eleven tilstrækkelig hjælp til, at eleven kan udføre den aktivitet, som læreren anser for relevant for elevens læring. Hvis læreren har det som en grundlæggende opfattelse, at læring af matematik forudsætter, at eleven selv er matematisk aktiv, vil læreren søge at formidle sin støtte til eleven indirekte ved f.eks. at omformulere problemet, bruge analogier, henvise til elevens matematiske viden eller til erfaringer fra lignede problemsituationer. I dette samspil vil læreren være meget opmærksom på signaler fra eleven, der kan tolkes som tegn på forståelse af opgavens enkelte dele eller deres sammenhæng. Sådanne tegn er nemlig lærerens alibi for at tro, at eleven nu har forudsætninger for at engagere sig i opgaveløsningen, og læreren kan med god samvittighed gå videre til den næste elev, der har problemer.

Der er altså stor risiko for, at læreren felagtigt antager, at elevens eventuelle relevante handlinger eller korrekte svar har grundlag i elevens engagement i det forelagte matematiske problem, selvom eleven reagerer alene på grundlag af en meget veludviklet evne til at fortolke samspillet med læreren i forhold til den didaktiske kontrakt. Sat på spidsen indebærer dette, at eleven kun kan lære noget ved at bryde den didaktiske kontrakt gennem at engagere sig i det matematiske problem og selv overtage styringen af sin virksomhed.

Kontekstualisering som mulighed

Som det fremgik af Jan Unenges artikel i sidste nr. af Nämnaren (nr. 1, 1994, p. 37) er et af hovedtemaerne i Jan Wyndhams afhandling netop betydningen af, at det er matematik som fag i skolen, der af eleverne opleves som den alt dominerende kontekst for deres virksomhed i matematikundervisningen. Det er lige præcis udviklingen af denne opfattelse af matematikfaget, der kan beskrives og forklares ved hjælp af begrebet den didaktiske kontrakt. Resultatet er, at, det der skulle være tilegnelse af abstrakt og generelt anvendelig matematik, for eleverne bliver til færdigheder, der er bundet til matematikundervisningens kontekst, altså til den didaktiske kontrakt med dens: arbejdsformer, lærebogsfremstillinger, symboler, opgaver, samværsformer mellem lærer og elev/elever, m.v. Netop derfor opleves matematikundervisningen af mange elever som dejlig konkret.

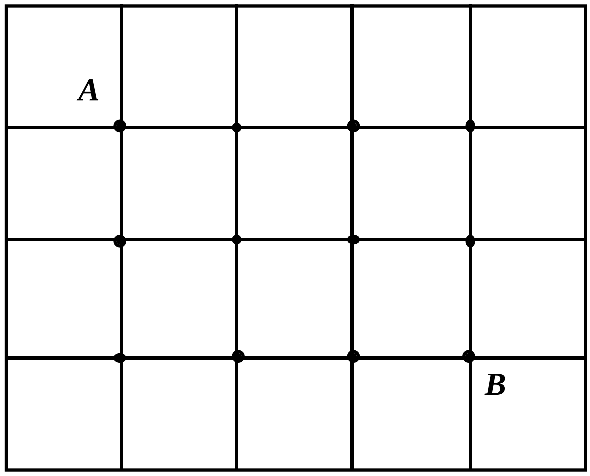
Jan Wyndhamn har (f.eks. Wyndhamn, 1988) peget på nødvendigheden af, at der i matematikundervisningen etableres kontekster, der gør det muligt for eleverne at fortolke deres virksomhed i relation til problemstillinger, der er oplevelsesfulde og relevante også uden for matematikundervisningen. Det vil imidlertid ofte være forbundet med store vanskeligheder for en lærer at ændre sin undervisningspraksis, så elevernes matematiske virksomhed i højere grad kan sættes i relation til forhold uden for matematikundervisningen. Dette kræver nemlig et brud med den sædvanlige didaktiske kontrakt.

Eksempler fra et udviklingsarbejde i geometri

Udviklingsarbejdet havde til formål at belyse mulighederne for og betydningen af, at elever på skolens ældste klassetrin – med passende støtte fra læreren – selv opdager, undersøger, beviser og systematiserer geometriske sammenhænge. Udviklingsarbejdet blev udført i samarbejde med fem matematiklærere, der alle gennemførte et 6 lektioners undervisningsforløb i deres egne klasser (en 7. klasse, tre 8. klasser og en 9. klasse), se Blomhøj (1991). Det geometrifaglige emne for undervisningsforløbene var ”taxi–geometri”. Det vil sige de spørgsmål og elevaktiviteter der kan komme ud af at man i stedet for det sædvanlige euklidiske afstandsmål måler afstanden mellem to punkter i et koordinatsystem ved summen af afstanden mellem punkternes projektioner på de to koordinatakser. Det var fælles for alle undervisningforløbene, at der gennem lærerens korte oplæg til forløbet blev præsenteret en kontekst i form af en tænkt by, der har et kvadratnet som vejkort. Ligesom det med god tilnærmelse er tilfældet i mange kvarterer og i nogle storbyer f.eks New York.

Eleverne blev således introduceret til forløbet på denne måde:

L: Her har vi et kort over Ternby (læreren peger på tavlen med kvadratnet). I denne by er gadenettet et kvadratnet. Hvis Anders, som bor ved gadekrydset A, skal køre i taxi til Bente, som bor ved B, hvor lang bliver turen så?
E: Den bliver vel 5.
L: Hvilken vej vil du køre?
E: 3 til højre og 2 ned.
L: Kan turen ikke gøres kortere? (pause)
E: Nej!, men der er andre veje på 5.
L: Ja, kom op og tegn nogle forskellige ture, der er 5 lange. (En elev tegner tre forskellige ”taxi-ture” på tavlen).
L: Vi kunne kalde den afstand, som en taxi nødvendigvis må køre for at komme fra en adresse til en anden, for taxi-afstanden mellem dem. Så er taxi-afstanden mellem A og B altså 5. Det kunne vi skrive kort på denne måde: ”T(A,B) = 5” (skrives på tavlen).
L: Nu skal I arbejde i grupper med nogle opgaver om taxi-afstande.



Figur 1: Udsnit af tavlen med kvadratnet

På baggrund af en sådan kort præsentation af arbejdede eleverne under forløbene i grupper på 2-3 elever med tilrettelagte systemer af opgaver vedrørende taxi-geometri. Opgaver var f.eks. udformet således:

1 Anders bor i A og Bente i B. De er kærester og besøger tit hinanden. Tegn fem ture af forskellig længde mellem A og B, som de kan bruge, og skriv længden af turene på figuren. Hvad er længden af en taxitur fra A til B? (T(A,B)=?).

2 Når Anders besøger Bente går de tit en tur rundt i området, hvor Bente bor. Lav fem rundture af forskellig længde, som de kan vælge imellem.

3 Anders og Bente har lige langt til skole. Hvor kan skolen ligge?

4 Prøv at besvare opgave 3 med andre placeringer af A og B.

På grundlag af iagttagelser af undervisningsforløbene (jeg var deltagende observatør i alle forløbene), de skriftlige opgavebesvarelser, som eleverne afleverede, samt interview af enkelte elever under og efter forløbene, har vi kunnet identificere tre forskellige virksomhedsformer, som vi har betegnet den *indledende*, den *løsningsorienterede* og den bevidst *reflekterende* virksomhedsform. Jeg fremhæver, at der er tale om tre virksomhedsformer, der kan vekselvirke, og som hver især kan give grundlag for elevernes læring. Denne læring vil imidlertid være af forskellig karakter inden for de tre former [1].

Den indledende virksomhed

Under den indledende virksomhed var de fleste elevers kommentarer og spørgsmål til lærerens fremlæggelse og første reaktioner på opgaverne stærkt præget af et ønske om at indordne det aktuelle forløb under den sædvanlige didaktiske kontrakt. Spørgsmål og kommentarer som: ”Står der noget om det i vores bog?” og ”Det er da nemt, man skal ikke engang regne!” var således almindeligt forekommende under lærerens præsentation. I starten af arbejdet med opgaverne i grupperne lød det f.eks.: ”Er det rigtigt – har jeg allerede lavet opgave 1?”, ”Skal vi bare lave fem ture?” og ”Må de kun gå på gaderne?”. Jeg tager sådanne elevreaktioner som udtryk for et ønske om at få klare rammer for og forventninger til deres virksomhed i forløbet. Jeg have på forhånd aftalt med lærerne, at de skulle være tilbageholdende med at svare direkte på sådanne spørgsmål fra eleverne, men til gengæld støtte eleverne i at diskutere opgaverne og meningen med dem i grupperne. Det grundlæggende spørgsmål i denne fase var for de fleste elever: *Hvad har det her med matematik at gøre?* Men selvom mange elever oplevede en vis frustration over ikke at kunne få klar besked fra læreren om, hvad det hele gik ud på, arbejdede de allerfleste grupper fra starten alligevel meget ihærdigt med opgaverne.

Særlig under den indledende virksomhed spillede by-konteksten en vigtig rolle. For det første bevirkede den, at næsten alle eleverne oplevede en umiddelbar forståelse af begrebet ”taxi-afstand”. Stort set alle elever var således efter lærerens korte præsentation i stand til at bestemme taxi-afstanden mellem to givne punkter. Eleverne fik gennem deres overvejelser under præsentationen og/eller gennem deres første handlinger indsigt i en række vigtige forhold. Eksempelvis: taxi-afstanden mellem to gadekryds (gitterpunkter) er altid et helt tal; taxi-afstanden fra A til B er lig med taxi-afstanden fra B til A; og der er som regel flere taxi-ture mellem to punkter (nemlig når de ikke ligger på samme gade).

For det andet er det en styrke, at by-konteksten har en stærk tilknytning til elevernes erfaringsverden. Dette viser sig f.eks ved, at eleverne – med udgangspunkt i lærerens forelæggelse – meget hurtigt udvikler en fælles sprogbrug. De fleste elever anvendte således fra starten ord som *gade, gadekryds, den korteste vej, den direkte vej, taxi-tur, taxi-afstand, omvej*. Under denne fase bruger eleverne associationer fra deres erfaringsverden til at forstå by-konteksten som en konkretisering.

For det tredje oplever eleverne by-konteksten som ”ufarlig” p.g.a. af dens ekstramatematiske karakter. Dette betyder, at de i højere grad er villige til selv at danne sig en mening med de enkelte opgaver og til at prøve sig frem under løsningen.

Brugen af by-konteksten indebærer imidlertid også en risiko for, at elevernes

1 Der gives i denne artikel kun et kort resumé af analysen af elevvirksomheden med enkelte eksempler. Den samlede analyse findes i Blomhøj (1991, kap. 5). I Blomhøj & Bredo (1992) beskrives de tre virksomhedsformer mere detaljeret ud fra en undervisningspsykologisk synsvinkel, bl.a. med henvisning til elevernes egen oplevelse af og holdning til deres virksomhed. Endvidere analyseres virksomhedsformernes forbindelse til en reaktiv/aktiv og en konstruktiv/kritisk kompetence.

opgavevirksomhed bliver fikseret til en bestemt kontekst-betinget forståelsesform. Dette er uheldigt, fordi det normalt vil være en fordel, hvis eleverne efter de indledende undersøgelser kan lade by-konteksten glide i baggrunden og i stedet hæfte sig ved nogle få væsentlige træk ved den foreliggende situation. Eksempelvis: sammenligne længderne af forskellige tegnede ture mellem to punkter, i stedet for at stille sig tilfreds med at finde længden af hver af disse ture; hæfte sig ved betydningen af, om taxi-afstanden mellem to punkter er lige (jämn) eller ulige (udda); eller generelt overveje en opgaves relation til tidligere opgaver. (Læseren opfordres til at prøve at finde nogle gadekryds på figur 2, der har samme taxi-afstand til både A og B). Erfaringerne tyder på, at en indledende håndfast tilknytning til by-konteksten i den præsenterende fase gør det svært for eleverne at frigøre sig fra denne kontekst og fæstne sig ved mere generelle træk ved resultaterne af deres virksomhed og få grundlag for at opleve kvadratnettet med det nye afstandsmål som en model af by-konteksten.

Den løsningsorienterede virksomhed

Denne var karakteriseret ved, at eleverne i høj grad –gennem det indledende arbejde – blev i stand til at indplacere deres virksomhed med opgaverne i den sædvanlige didaktiske kontrakt. Eleverne opstillede således selv rent kvantitative mål for deres virksomhed (f.eks. at løse så mange opgaver som muligt på kortest mulig tid), der var uden relation til opgavernes faglige indhold. I mange af grupperne blev arbejdet med opgaverne rationaliseret, for eksempel gennem uddelegering af opgaver eller funktioner til gruppens medlemmer. Der blev ikke brugt megen tid på at diskutere meningen med eller resultaterne af opgaverne i grupperne.

Gennem arbejdet med opgaverne blev der i næsten alle grupper skabte erfaringsforudsætninger for at danne og undersøge forskellige hypoteser om generalisering af deres resultater, men grupperne reagerede ikke spontant på dette grundlag.

Hvis det er den beskrevne didaktiske kontrakt, der præger elevernes holdning til faget og til undervisningen, kan man ikke umiddelbart forvente, at de i den givne sammenhæng skulle føle den store tilskyndelse til selv at være undersøgende, eksperimenterende og hypotesedannende i deres virksomhed. Selvom flere af lærerne under præsentationen fremhævede overfor eleverne, at det aktuelle forløb adskilte sig fra den sædvanlige undervisning ved, at det her var meningen, at eleverne selv skulle finde ”reglerne”, var dette åbenbart ikke tilstrækkeligt til at ændre elevernes grundlæggende opfattelse af deres egen rolle i undervisningen. Forståeligt nok, for sådanne opfattelser kan kun forventes ændret igennem en længere proces.

Det mest markante resultat fra udviklingsarbejdet var således, at den løsningsorienterede virksomhed kun kunne brydes gennem lærerens *udfordrende dialog* med eleverne under arbejdet med opgaverne. En udfordrende dialog er karakteriseret ved lærerens bevidste forsøg på at udvilke elevernes viksomhed fra at handle om at løse de enkelte opgaver til at begrunde/bevise et opnået resultat, at overveje en opgave og dens løsning i relation til tidigere opgaver og resultater, at formulere nye problemer eller at generalisere et opnået resultat. Hvis ikke grupperne med mellemrum blev udfordret af lærerens indgribende dialog, arbejdede de sig gennem opgaverne uden at reflektere over de opnåede resultater og deres sammenhæng med tidligere opgaver.

I de tilfælde, hvor eleverne lod sig udfordre af samspillet med læreren, arbejdede grupperne i kortere eller længere perioder på en måde, som vi har valgt at betegne som reflekterende elevvirksomhed.

Den reflekterende elevvirksomhed

Denne er karakteriseret ved, at eleverne blev bevidste om deres egen virksomhed og på en eller anden måde reflekterede over denne. Under den løsningsorienterede virksomhed fokuserede eleverne udelukkende på opfyldelse af de krav, der blev stillet i opgaverne, mens de under den reflekterende virksomhed også forholdt sig til forudsætningerne for deres resultater og til resultaternes indbyrdes sammenhæng. I samværet med eleverne oplevede vi meget tydeligt, at der er tæt forbindelse mellem følelsesmæssige omstændigheder og muligheden for at udvikle en reflekterende virksomhed.

I dialogen med læreren var mange af eleverne indledningsvis ofte ret afvisende over for udfordringer, der gik ud over besvarelsen af de enkelte spørgsmål i de stillede opgaver. De opfattede det som utidig indblanding. Denne modvilje var lettest at overvinde, når læreren udtrykte interesse for elevernes aktuelle virksomhed og at udfordringen til eleverne kunne tage konkret udgangspunkt i denne virksomhed.

Her gengives to dialoger fra undervisningsforløbene. I begge tilfælde er der tale om, at eleverne med støtte fra lærerens udfordring reflekterer over deres virksomhed.

Eks. 1: Det drejede sig om en gruppe, der havde fundet frem til følgende sætning: ”Hvis T(A,B) er ulige, er det umuligt at finde et punkt (gadekryds) lige langt fra A og B”, og hvor den efterfølgende samtale forløb omtrent således:

L: Det lyder interessant, hvordan kan I være sikre på det?
E: Der kan ikke være nogen inde i taxi-området, fordi T(A,B) er 7 og
ulige + ulige = lige.
L: Kan der være nogen punkter uden for taxi-området?
E: Nej.
L: Tror I ikke der kan være et punkt P, her langt uden for papiret, der dur?

Efter at have været alene nogle minutter, havde de skrevet følgende forklaring: *Hvis man skal forbi P på turen fra A til B så bliver turen T(A,P)+T(P,B) og den skal være ulige fordi T(A,B) er ulige* [Eleverne havde tidligere bevist at enhver rundtur har en lige længde, så de ved at
T(A,P) + T(P,B) + T(A,B) er lige. Heraf slutter de, at T(A,P) + T(P,B) skal være ulige] *og så er P ikke ligelangt fra A og B, fordi ulige + ulige = lige.* (Her mangler eleverne strengt taget at konstatere at lige + lige også er lige, men det anser de måske for at være for indlysende.)

Eks. 2: Der udspillede sig følgende dialog mellem en lærer og en gruppe på to elever, der arbejdede med opgaven: ”Hvor mange forskellige taxi-ture er der mellem A og B? (Punkterne A og B er placeret som på figur 2.). Eleverne, der tilsyneladende ikke havde tegnet forskellige taxi-ture, skrev blot som svar på opgaven Der er *10 mulige ruter* og de virkede meget sikre på deres resultat. Samtalen herefter:

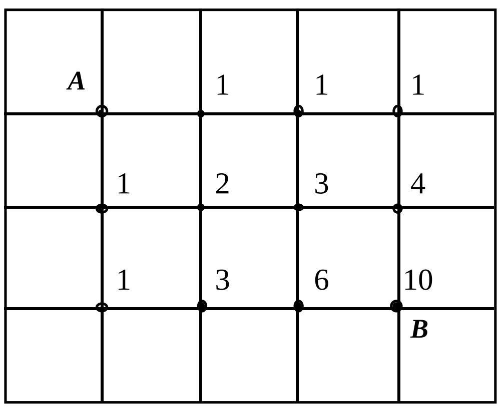
L: Hvordan kan I være sikre på, at I har fundet alle mulige taxi-ruter?
E 1: Jo, se nu her. Vi har alle dem, der går igennem det punkt, der er nemlig kun en (peger på punktet iøverstehøjre hjørne af taxi-området, se figur 3), *der er to dergår gennem det punkt* (peger på punktet til venstrefor detførste) , *det er de to* (viser dem med pennen).
L: Hvad med den første tur, den går da også gennem detpunkt.
E 2: Den har vi jo talt med!
L: Prøv, om I under hvert punkt i taxi-området kanskrive, hvor mange ruter der fører fra A til punktet.

Efter nogle minutter havde gruppen lavet fig. 2. Ud for hver af punkterne mellem A og B havde de skrevet tal, der angav hvor mange forskellige veje, der fører fra A til det pågældende punkt.

L: Flot! Hvad nu hvis B lå en tern længere nede?

Efter ret hurtigt at have skrevet en ny række tal svarede de: Så vil der være 20 mulige ruter!

L: Kan I skrive ned, hvad det er for en regel, I bruger?
E 2: Vi lægger bare sammen!
L: Hvad lægger I sammen, prøv at skrive det præcist!



Figur 2

Lidt efter havde de skrevet:
Antallet af veje, der fører fra punktet A til et punkt mellem A og B, er lig med summen af antallet af veje, der fører fra A til de nabopunkter, der ligger tættere på A.

I begge eksempler får eleverne – i kraft af lærerens udfordrende dialog – grundlag for selv at anvende ræsonnementsformer, der er centrale inden for matematik. I den sidste dialog er der endvidere mulighed for, at eleverne danner et konkret personligt erfaringsgrundlag for en senere tilegnelsen af et vigtigt element i kombinatorik, nemlig princippet i Pascal's trekant.

Opsummering

Erfaringerne fra udviklingsarbejdet har vist, at der kan etableres kontekster i skolens matematikundervisning, der kan give grundlag for en reflekterende elevvirksomhed. Det er imidlertid vigtigt at understrege, at sådanne former for kontekstualisering også er underlagt de rammer, den didaktiske kontrakt udstikker. Analysen af elevvirksomheden har da også vist, at lærerens indgribende og udfordrende dialog med eleverne under deres virksomhed er afgørende for, om eleverne kan udvikle en reflekterende virksomhed. Det er med andre ord gennem dialogen med eleverne under deres virksomhed, at den didaktiske kontrakt lejlighedsvis kan overskrides. Resultaterne fra udviklingsarbejdet viser også, at det for flertallet af eleverne – med passende støtte fra dialogen med læreren – faktisk er muligt at udvikle en virksomhed, hvor de selv opdager, formulerer og beviser matematiske sammenhænge. Det er i øvrigt interessant, at lærerne i mange tilfælde var positivt overrasket over elevernes matematiske virksomhed.

Det er min opfattelse, at det jeg her har beskrevet som udvikling af reflekterende elevvirksomhed i matematik bør være et vigtigt sigte for skolens matematikundervisning, og at kontekstualisering og bevidsthed om betydningen af den didaktiske kontrakt kan være nyttige redskaber ved tilrettelæggelse og gennemførelse af en matematikundervisning med dette sigte.

Det skal imidlertid understreges, at der er en række vanskeligheder forbundet med at realisere en sådan matematikundervisning. For det første stiller det store krav til læreren at tilrettelægge og gennemføre en undervisning, der bestandig udfordrer elevernes virksomhed. I udviklingsarbejdet havde lærerne i kraft af deres fælles forberedelse et godt grundlag for at udfordre elevernes virksomhed. Lærerne havde på forhånd overvejet betydningen af brugen af by-konteksten, udformningen af opgaverne og deres indbyrdes sammenhæng, samt hvordan de enkelte opgaver kunne tænkes at give grundlag for elevernes dannelse og undersøgelse af forskellige hypoteser. Hertil kommer, at læreren under gennemførelsen af forløb, som dem der indgik i udviklingsarbejdet, må forholde sig særskilt til de enkelte gruppers virksomhed og de ofte meget store individuelle forskelle eleverne imellem med hensyn til f.eks. motiv for at deltage i undervisningen, vilje til samarbejde, tålmodighed og selvkontrol, og faglige forudsætninger. I klasser med mere end tyve elever kan sådanne vanskeligheder forekomme uoverstigelige og den traditionelle gennemgang af lærebogen med tilhørende opgaveregning fremstår som den overkommelige – men i virkeligheden helt utilstrækkelige – undervisningsform.

Litteratur

Blomhøj, M. (1991): *Samspil mellem teori og praksis i matematikkens didaktik– et udviklingsarbejde i geometri.* Tekst MI 37 Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M. & Bredo, O. (1992): Problemløsning bør også være refleksion. *Psykologisk Pædagogisk Rådgivning* nr. 6, pp. 470-487.

Brousseau, G. (1984): The crucial role of the didactical contract in analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. I H.-G. Steiner et al (1984): *Theory of Mathematics education* (TME), ICME 5, Topic area and miniconference. Occational paper No. 54, IDM Bielefeld.

Wyndhamn, J. (1988): *Tankeform och problemmiljö – Skolan som kontekst för tänkande i elementär matematik.* SIC 26, University of Linköping Studies in Communication.

Problem i taxi-geometri

Morten Blomhøj
Översättning Göran Emanuelsson

Problemkrets 1

Här följer några exempel som visar på betydelsen av jämnt och udda avstånd i taxi-geometrin. Uppgifterna kan ges en kort presentation, som den i artikeln.

> **1** Anders bor i *A* och Britta i *B*. De är förälskade och åker ofta till varandra. Rita fem vägar med *olika längd* mellan *A* och *B*, som de kan åka. Ange längden på varje väg i figuren. Vad är längden av en taxi-tur från *A* till *B*?

Eleverna kan själva välja olika placeringar av de två punkterna. Det enda de behöver för att komma i gång är penna, papper med rutnät.

Denna uppgift kan ge bakgrund till följande sats. Med *jämn* och *udda* längd menas en längd som anges av ett jämnt resp. ett udda tal.

> **Sats 1:** Alla vägar med gemensamma ändpunkter har längder som antingen alla är jämna eller alla är udda.

En uppgift, för att fortsätta undersökningen i denna riktning kan vara följande (punkternas placering givna i en teckning):

> **2** Sjukhuset i *A* har en ambulans, som varje vecka ska hämta patienter på adresserna *B*,*C* och *D*. För att det inte ska bli samma patient, som varje gång körs med runt till de övriga, turas patienterna om att vara den, som blir hämtad sist. Ordna tre rundturer, som ambulansen kan följa. Vilken blir längden av var och en av de tre turerna?

Undersökningar, som inspirerats av uppgift 2 kan leda till formulering av nästa sats.

> **Sats 2**: Alla rundturer (slutna turer) har jämn längd.

Det är klart, att denna sats bara gäller så snart det förutsätts, att man bara får ändra riktning i gitterpunkter. Annars skulle ju t.ex. en 1/2 ut och en 1/2 hem ge olika rundturer! Nästan alla elever i utvecklingsarbetet antog att detta var en förutsättning och formulerade med stöd av läraren ett bevis av följande slag:

Bevis: Om man på en rundtur kör x steg till höger, så måste man också köra totalt x steg till vänster för att komma tillbaka till utgångspunkten. På liknande sätt y steg ned motsvaras av y steg upp. Längden av en rundtur kan då skrivas som: $2x + 2y = 2(x + y)$, vilket ju är ett jämnt tal.

Lägg märke till, att detta bevis också täcker det fall, när rundturen genomlöper vissa sträckor flera gånger. Alla elever, som jag arbetat med antog själv – vilket inte är nödvändigt – att en tur inte ska komma till samma ställe två gånger. Detta är ett exempel på, att det kan vara bra att vänta med att närmare diskutera förutsättningar och spelregler, tills eleverna själva fått erfarenheter av arbetsområdet.

Det är svårt, att bevisa sats 1 direkt, men med hjälp av sats 2 går det ganska lätt:

Bevis: Om vi har två turer med samma ändpunkter, *A* och *B*, så har vi samtidigt en rundtur med start och slutpunkt i *A*. Längden av denna rundtur är summan av längden av turen från *A* till *B* och turen från *B* tillbaka till *A*. Dessa summor är jämna p.g.a. av sats 2, och då jämn – jämn = jämn och jämn – udda = udda , så måste de två turerna ha jämna eller udda längder.

Man kan bevisa sats 2 med hjälp av sats 1:

Bevis: Då varje rundtur innehåller minst två punkter, kan man på en rundtur vilken som helst välja två olika punkter (*A* och *B*). Turen ut (från *A* till *B*) och turen hem (från *B* tillbaka till *A*) har p.g.a. sats 1 samma paritet och eftersom både jämn + jämn och udda + udda ger jämn , kommer rundturerna att vara jämna.

Sats 1 och sats 2 är alltså likabetydande. När det rör sig om elever i årskurserna 8 – 10, så tycker jag att detta sammanhang är ett lämpligt mål for lärarens efterbehandling av elevernas undersökningar inom problemkretsen.

Problemkrets 2

Här rör det sig om ”cirklar”. En taxi-cirkel definieras analogt med den euklidiska cirkeln som mängden av gitterpunkter, som har ett givet taxi-avstånd till en given punkt (cirkelns medelpunkt).

Eleverna kan direkt utifrån definitionen rita taxi-cirklar genom att pröva sig fram och finna, att alla taxi-cirklar har samma form. En del elever protesterar mot beteckningen taxi-cirkel, eftersom punktmängderna inte är ”runda”. I utvecklingsarbetet var elevreaktionerna en bra utgångspunkt för diskussion av definitionen av en cirkel i ”vanlig” geometri.

Det är bra att ge uppgifter om taxi-cirklar som sätter igång elevernas tankearbete t.ex.:

> **3** Ett bankrån har ägt rum på adressen (5, 5). Rånaren har flytt på cykel. Polisen beslutar direkt att spärra av alla vägkorsningar på ett avstånd av 2.5 km från banken (en ruta = 500 m). Hur många polisbilar behövs för denna aktion?

Uppgiften rymmer goda möjligheter för att grupper av elever kan gå vidare och undersöka antalet punkter på taxi-cirklar med andra radier. Om det ges tid till detta kommer de allra flesta själv upptäcka sats 3.

> **Sats 3**: För en taxi-cirkel med medelpunkt C och radie r gäller, att antalet punkter på cirkeln är $4r$, för $r > 0$. Om $r = 0$ består cirkeln bara av punkten C.

> **4** Vid utarbetandet av evakueringsplaner i samband med farlig produktion (t. ex. atomkraft eller kemisk produktion) tas det inte enbart hänsyn till miljöfaror och spridning av ett eventuellt utsläpp, utan också till hur många människor det är möjligt att evakuera. En kemisk fabrik har adressen (6, 4). Gör en tabell som underlag för en evakueringsplan, som visar antalet adresser, som ligger inom ett avstånd av 2, 3, 4, 5, 6, 8 och 10 km (en ruta svarar mot 1 km). Hur många adresser ligger mellan 5 och 8 km från fabriken?

Om vi låter $p(r)$ och $q(r)$ vara respektive antal punkter på och innnanför en taxi-cirkel med radien r, kan uppgift 4 besvaras utifrån följande funktionstabell:

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(r)$	1	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
$q(r)$	0	1	5	13	25	41	61	85	113	145	181

Erfarenheterna från mitt utvecklingsarbete visar, att eleverna när de gör en sådan tabell i samarbete upptäcker och utnyttjar sambandet mellan funktionerna. Med denna bakgrund får man en utgångspunkt till att själv formulera eller lättare följa och delta i en diskussion om följande uttryck för de två funktionerna:

$p(r) = 4r$ för $r > 0$, och $p(0) = 1$;
$q(r) = p(r-1) + q(r-1)$ för $r > 0$, och $q(0) = 0$

Hur q(r) kan uttryckas direkt som funktion af r är naturlig för de flesta. Det finns flera sätt att angripa detta. Under utvecklingsarbetet var det grupper, som kom fram till ett uttryck för $q(r)$ med hjälp av geometriska betraktelser utifrån en figur med koncentriska taxi-cirklar. Andra prövade sig fram genom att jämföra olika funktioner med funktionsvärden $q(r)$. Det var konstigt nog inga elever, som avsatte funktionsvärden för $q(r)$ i ett koordinatsystem.

Som lärare kan man utifrån elevernas arbete avgöra om det kan vara bra, att göra en gemensam härledning av ett uttryck för $q(r)$ genom att successivt använda ett rekursivt uttryck på summan för $q(r)$:

$$q(r) = p(r-1) + p(r-2) + p(r-3) + \ldots\ldots + p(1) + p(0),$$

vilket ger

$$\begin{aligned} q(r) &= 4(r-1) + 4(r-2) + 4(r-3) + \ldots\ldots + 4 + 1 \\ &= 4[(r-1) + (r-2) + (r-3) + \ldots\ldots + 1] + 1 \\ &= 4[r(r-1)/2] + 1 = 2r(r-1) + 1 = 2r^2 - 2r + 1 \end{aligned}$$

I den sista omskrivningen har jag utnyttjat, att summan av de n första naturliga talen är lika med $n(n + 1)/2$.

> **Sats 4**: Antalet gitterpunkter inne i en taxi-cirkel med radie r ($r > 0$) är:
>
> $$2r^2 - 2r + 1$$

***Anm**:* Jag hoppas att dessa exempel kan inspirera läsaren att pröva och själv utveckla uppgifter i taxi-geometri. I Blomhøj (1991) finns en mer systematisk framställning av åtta olika problemkretsar.