Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Ett sätt att tänka på progression i begreppskunskap

I författarnas förra Nämnarenartikel beskrev de ett matematiskt begrepp som bestående av tre delar: en matematisk definition, ett antal situationer som ger mening åt begreppet och ett antal representationer för begreppet. Begrepp är en mental konstruktion som tar sitt stöd i dessa tre ben. Här beskriver de hur det går att tänka på progression i begreppskunskap med bråkbegreppet som exempel.

Elevers begreppsuppfattning utvecklas olika och utvecklingen är i allmänhet inte linjär. För att organisera undervisning som stödjer elevernas begreppsutveckling behövs planering. Vi behöver veta vart vi är på väg och vilka missuppfattningar som är vanliga i relation till de aktuella begreppen. Vi behöver helt enkelt en tankemodell för att tänka på progression i begreppskunskap. I denna artikel presenterar vi en sådan tankemodell och använder bråkbegreppet som exempel. Terminologin som vi använder presenterade vi i vår förra artikel. Här följer en bråkrelevant repetition:

Situationer är konkreta händelser. Ibland är de upplevda i vardagen och ibland beskrivna som en kontext i en uppgift.

Representationer är talade och skrivna ord, bilder och matematiska symboler som illustrerar en situation eller uttrycker matematiska objekt. För tal i bråkform är till exempel bilder av pizzor och chokladkakor vanliga för att beskriva del-av-helhetsbråk. Dessa representationer kallas *ikoniska representationer* vilket är bilder, figurer, föremål etc där själva formen avslöjar den struktur eller det fenomen som vi är intresserade av. Ett antal streck som IIIII är en ikonisk representation av tal eller antal. Man kan manipulera en sådan representation direkt, t ex flytta isär strecken i två grupper som II och III för att upptäcka eller illustrera att fem kan delas upp i två och tre. De ikoniska representationerna utgör ett begreppsligt förstadium till matematikens *icke-ikoniska representationer* som består av symboler och notationer. Motsvarande icke-ikoniska representation till de fem strecken är 5 och $5 = 2 + 3$. Symbolerna 5, 2, 3 och + kan bara förstås om man känner till konventionerna (gemensamma överenskommelser) om vad de ska antas betyda. Bråkstrecket är en icke-ikonisk representation (fast det bara är ett streck) eftersom det signalerar en hel rad matematiska konventioner.

Vi kommer att tala om två former av *kunskap*. Den *operationella kunskapen* innebär de mentala och fysiska handlingar som utförs i samband med att eleverna löser matematikuppgifter och problem. Den *predikativa kunskapen* består av de språkliga och symboliska uttrycken för den operationella kunskapen. Det är varken möjligt eller meningsfullt att försöka skilja dessa kunskapsformer helt åt.

Kunskapsformerna samexisterar alltid men den operationella kunskapen kan många gånger vara mycket mer utvecklad än den predikativa. Varför är det då meningsfullt att tala om två former av kunskap? Jo, den predikativa kunskapen är nödvändig för att eleverna ska kunna transformera sina kunskaper till nya situationer – alltså för att begreppsutveckling ska kunna ske.

Progression av bråkbegreppet

Innan vi talar om progression av bråkbegreppet behöver vi slå fast två saker. Vad är ett bråk och vad är det vi vill att eleverna ska kunna?

Definition: Ett bråk är den multiplikativa relationen mellan två uttryck, där nämnaren är skiljd från noll.

Det här är inte en matematiskt fullständig definition. En sådan är mycket krånglig. Men det är en definition som fungerar som ram för bråkbegreppet. Eleverna ska förstå att den matematiska symbolen bråkstrecket signalerar att det rör sig om ett bråk och att samma räkneregler alltid gäller för samtliga uttryck skrivna på bråkform, oavsett om det rör sig om enkla bråk eller mer komplicerade uttryck. Det är vanligt i svenska läromedel att man begränsar sig till rationella tal men den begränsningen är inte meningsfull i sammanghanget. Tvärtom är det förvirrande för eleverna eftersom t ex $\pi/3$ då inte skulle vara ett bråk trots att det följer samma räkneregler och representeras av samma slags symbol.

$$\frac{7}{4} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \qquad \frac{0.5}{6.7} \qquad \frac{a/b}{a} \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{x^2+1}{2x^3-4x} \qquad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n}$$

Figur 1. Några bråkuttryck. De enklaste behandlas på lågstadiet och kan introduceras redan i förskolan. De mest komplicerade behandlas i senare kurser på högskolan. Bland uttrycken finns rationella tal på standardform, kvot av tal skrivna på decimalform som också representerar ett rationellt tal, kvoter av tal som inte är rationella, kvot av polynom vilket ibland kallas rationella uttryck, kvot av trigonometriska funktioner och kvot av formella potensserier.

Bråken i figur 1 hör alla till bråkbegreppet eller snarare begreppsfältet för bråk. Även operationen division ingår i begreppsfältet, eftersom division betecknas med den matematiska symbolen bråkstrecket och därmed följer samma räkneregler som alla andra uttryck i bråkform. Mycket praktiskt. Vi måste bara hålla ordning på att addition och multiplikation hanteras lite annorlunda när vi t ex arbetar med formella potensserier eller polynom, jämfört med när vi hanterar heltal. Även de enklaste bråken kan beskriva eller vara beskrivningar av helt olika situationer. Är det en del-av-helhetssituation eller beskriver bråket ett del-del-förhållande? Kanske är bråket en operator eller ett mått. Eller är det kanske en uppdelning som ska utföras så att bråket beskriver en helt vanlig division? Att samma representation används ställer stora krav på elevernas förmåga att koda av och tänka på vilken sorts situation som presenteras.

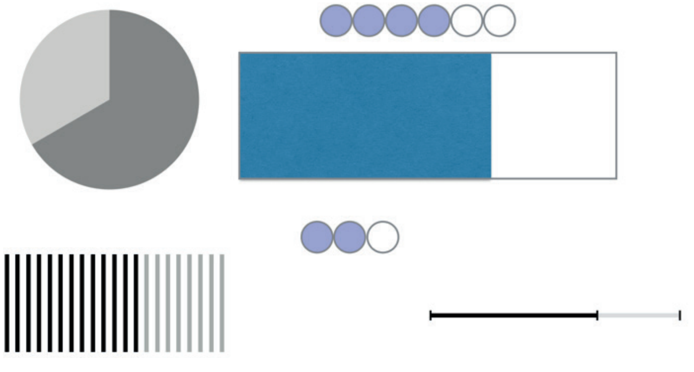
Läs mer om begreppsfält i Nämnaren 2018:2.

Progression i begreppsfältet bråk innebär att känna igen och kunna operera på en allt större uppsättning situationer som kan betecknas och behandlas med bråkuttryck, men också att kunna arbeta med en allt större uppsättning representationer för dessa situationer och för bråkbegreppet.

Vi kommer att presentera de olika klasser av situationer som relaterar till bråkbegreppet. Det ska inte uppfattas som att begreppsutvecklingen ska ske i den ordningen. Begreppsutveckling är som alla lärare vet inte en linjär stig där alla elever tar exakt samma steg mot ett givet mål. I den här tankemodellen vandrar eleverna lite hit och dit på begreppsfältet.

Bråk som del av en helhet

Redan i förskolan är pedagogerna i allmänhet skickliga på att introducera situationen *del-av-helhet* genom frågor som: Vill du ha ett halvt äpple eller kanske en fjärdedel? Efter att ha delat kakor, frukt och pizzor är barnen bekanta med ett grundläggande del-av-helhetsbegrepp i relation till de konkreta representationerna av de ätbara kakorna, äpplena och pizzorna. I skolan ersätts de ätbara pizzorna med bilder av pizzor. Det är ett första steg i en begreppsutveckling som syftar till att de ikoniska representationerna fasas ut till förmån för den algebraiska icke-ikoniska bråkrepresentationen a/b, där b är skiljt från 0 och där a och b kan vara vilka matematiska uttryck som helst.



Figur 2. Två tredjedelar av sex, två tredjedelar av en cirkel, två tredjedelar av en rektangel, två tredjedelar av tjugofyra streck, två tredjedelar av tre, två tredjedelar av en sträcka.

Alla bilder i figur 2 är ikoniska representationer. Ibland görs principiell skillnad på del-av-helhet och del-av-antal. Med del-av-helhet brukar man då mena när ett föremål eller en figur delas i lika delar och man intresserar sig för ett visst antal sådana delar. I ikoniska representationer som illustrerar del-av-helhet lär vi oss att en storleksrelation är i fokus. Med del-av-antal menas vanligen att vi har ett antal och fokuserar på en delmängd av detta antal, som två av tre i bilden ovan. I bråksammanhang är det den multiplikativa relationen som finns inbyggd i denna relation som vi är intresserade av. När vi målar två av tre är det intressanta inte att det är en omålad bit kvar (för att $2+1=3$). Det nya med bråk och som gör bråk till en multiplikativ struktur är att det är förhållandet mellan helheten 3 och delen 2 av 3 som är av intresse. Det är detta synsätt som gör att de fyra prickarna av de sex och de 16 strecken av de 24 båda kan beskrivas som två tredjedelar. Det här formaliseras på ett mer exakt sätt när vi tittar på situationer som handlar om mått och förhållanden.

Del-av-helhetssituationer används vanligtvis för att introducera tal skrivna på bråkform. Det finns dock en fara som varje lärare måste vara uppmärksam på om inte elevernas bråkbegrepp ska haverera redan i detta tidiga skede. Såväl nationell som internationell forskning visar att många elever tror att ett bråk alltid har en täljare som är mindre än nämnaren, vilket den alltid blir i del-av-helhetssituationer som representeras ikoniskt som i exemplen. Denna missuppfattningen sitter djupt hos många elever och är en direkt följd av en ensidig undervisning där eleverna presenteras för situationer där täljaren alltid är mindre än nämnaren. För att undvika att elevernas begreppsutveckling strandar behöver de tidigt presenteras för situationer där täljaren är större än nämnaren. Det här går medvetet emot den uppfattning som vanligen associeras med delar av helheter. Helheten är det hela. Delen kan väl inte vara större? Jo det kan den, men för att förstå det krävs att eleverna utvidgar sin syn på vad som är en del, vilket är en halsbrytande mental övning. Därför är det bra att i något sammanhang vänja eleverna vid att täljaren mycket väl kan vara större än nämnaren, exempelvis genom att lyfta fram att helt vanlig division också är en situation som hanteras med bråkbegreppet. I division är täljaren i allmänhet större än nämnaren under ganska många skolår, vilket leder till helt motsatta missuppfattningar.

Bråknotationen som en representation för division

Att dela lika är ingen konstighet. Barn ställs tidigt inför situationer där de delar upp en mängd, t ex godisbitar, så att alla får lika många. Antalet godishögar vi ska konstruera motsvarar antalet barn som ska dela på godiset. Endast mängden i varje godishög är okänd. Detta kallar vi *delningsdivision*. Om vi istället frågar hur många gånger en viss storlek på nämnaren får plats i täljaren så talar vi om *innehållsdivision*. Då är alltså storleken, dvs mängden godisbitar i varje hög, känd. Det vi inte vet är hur många barn som kan få en egen godishög. Som vi nämnde tidigare omfattas division av begreppsfältet bråk. Det syns tydligt på notationen, bråkstrecket, att division följer samma räkneregler som alla andra uttryck skrivna på bråkform.

Varför känns det inte alltid helt självklart att division och bråk ska in under samma paraply? Det beror på att i division fokuserar vi på operationen att skriva om uttrycket till en heltalskvot. Den ursprungliga representationen 12/3, för att t ex beskriva att tre barn ska dela på 12 godisbitar, ger i sin befintliga representation inte tillräcklig information för att dela upp godiset mellan barnen. Här gäller det att inse att lösningen är att uttrycka kvoten i representationen 4 istället.

När det gäller uppdelning så är den vanligaste och mest utbredda missuppfattningen att täljaren måste vara större än nämnaren. Annars går det inte att dividera! Detta är helt tvärt emot den vanligaste missuppfattningen för bråk som beskrivning av hur en del förhåller sig till en helhet. Återigen reser sig grynnor för elevernas begreppsprogression som beror på ett alltför ensidigt och onyanserat val av situationer som befäster istället för att de utmanar och utvecklar elevers uppfattningar. Missuppfattningen är särskilt besvärlig då den utesluter svar av tal skrivna på bråkform. För att inte hamna här behöver eleverna arbeta med situationer där täljaren är mindre än nämnaren. Även elever i de tidigaste skolåren kan begreppsliggöra en situation där sex barn ska dela på två pizzor, alltså 2/6. Det finns två uppenbara sätt att ta sig an problemet. Antingen tänker eleverna att varje barn får en del av sex från både pizza 1 och pizza 2. Alltså 1/6 + 1/6 = 2/6. Alternativt kan de först dela barnen i grupper och tänka att tre barn får dela på den ena pizzan och de andra tre barnen på den andra pizzan. Då blir svaret av symmetriskäl direkt att varje barn får 1/3 pizza. (Här öppnar sig gyllene möjligheter att prata om likhet mellan olika bråk eftersom 1/3 uppenbarligen är lika med 2/6.) Poängen med att tidigt arbeta med divisioner som dessa är att eleverna tidigt ska se att det går fint att utföra divisioner med en täljare som är mindre än nämnaren.

Men, nu uppdagar sig ytterligare ett begreppsligt dilemma som grundar sig mer i den predikativa kunskapen om bråk. Hur kan det vara ok att kvoten inte är ett heltal? Situationen att tre barn delar på en pizza kan representeras med kvoten; en pizza delad på tre barn, dvs 1/3. Men svaret, en tredjedel, ser precis likadant ut, 1/3. Det ser ofärdigt ut att utföra en division av ett med tre och komma fram till 1/3. Beräkningen skulle uttryckas som 1/3 = 1/3. Vad är det för beräkning? Underligheterna förklaras av att vänsterledet uppmanar till att utföra en operation – en process – medan högerledet beskriver en statisk kvot. Vi har alltså samma representation men den kräver olika avkodning av betydelsen för vänsterledet respektive högerledet. Just därför är det viktigt att belysa att det är skillnad på att 1) betrakta situationen en pizza delad på tre barn som en uppmaning till att utföra operationen division och 2) att beskriva kvoten som ett tal skrivet i bråkform 1/3. Utan ord, predikativa former av kunskap, för att tänka på dessa skillnader i vad som representeras kan vi inte förvänta oss att elevernas begreppsutveckling framskrider mot vårt mål. Det är alltför intrikata notationer för att det ska lämnas åt eleverna att upptäcka dessa skillnader i representationer på egen hand.

Bråk som ett uttryck för ett förhållande

Innan det uppstår några missuppfattningar orsakade av vår framställning vill vi vara tydliga med att bråk som del-av-helhet också beskriver ett förhållande. Förståelsen av bråk som ett förhållande överlappar alltså förståelsen av ett bråk som en del-av-helhet. I situationer som handlar om förhållanden är den multiplikativa relationen mellan täljaren och nämnaren det centrala. Alltså hur många gånger större eller mindre en del är i relation till en annan del. Så tanken med bråk som ett uttryck för ett förhållande är att det är jämförelsen av hur stort något är i relation till något annat som är i förgrunden. Det är relevant i många situationer som när vi ska blanda salladsdressing, studera likformighet, skala, trigonometri eller förstå vad som menas med konsumentprisindex. Ibland anges en av delarna i relation till helheten, som att du för att blanda till 10 dl saft behöver 2 dl koncentrerad saft. Det förhållandet kan också anges som den ena delen i relation till den andra och då används ofta beteckningen 2:8 för att visa att 2 delar saft kräver 8 delar vatten. Förhållanden som idé används också i så kallade sammansatta enheter, som för att ange att melonen kostar 20 kr/kg, att bilen kör i 70 km/h eller att guld väger 19,3 g/cm^3.

Att förstå att bråket uttrycker ett förhållande innebär att hejda sig från att utföra en division för att uttrycka kvoten med ett heltal eller ett tal i decimalform. Att förhållandet mellan konens volym och cylinderns volym är 1:3 ger inte samma stuns och förklaringsgrad uttryckt som 0,3333… Förhållanden uttrycks bäst i bråkform. Tänk på riktningskoefficienten som beskriver förändringen i y-led över förändringen i x-led. Uttryckt som 3 behöver eleven själv introducera en implicit etta för x-led. Uttryckt som 3/1 kan även den som ännu inte behärskar de implicita ettorna förstå notationen.

Läs mer om förhållanden och proportionella resonemang i tidigare artiklar, från Nämnaren 2017:2 till 2018:1.

För elevernas begreppsutveckling är det särskilt viktigt att undvika att operera på förhållanden i syfte att uttrycka dem som kvoter av heltal eller tal i decimalform. Det är också viktigt att tala om det neutrala elementet, den implicita ettan, som kan tillföras alla multiplikativa situationer. Genom att ge eleverna den predikativa kunskapen att vi alltid kan skapa ett multiplikativt förhållande genom att introducera en implicit etta kommer det att ge dem obegränsade möjligheter att sätta upp två förhållanden i en proportion och att resonera om de inbördes relationerna. Att kunna göra det löser majoriteten av de problem som eleverna arbetar med i grundskolan och kurs 1 på gymnasiet. Proportionella resonemang är också helt centrala i fysiken. Det är av största vikt att eleverna får arbeta med situationer där de behöver uttrycka svaret i bråkform (och inte som ett tal i decimalform) för att bevara förståelsen för hur det uttryck som representeras av täljaren förhåller sig till uttrycket representerat av nämnaren.

Tal i bråkform som operator

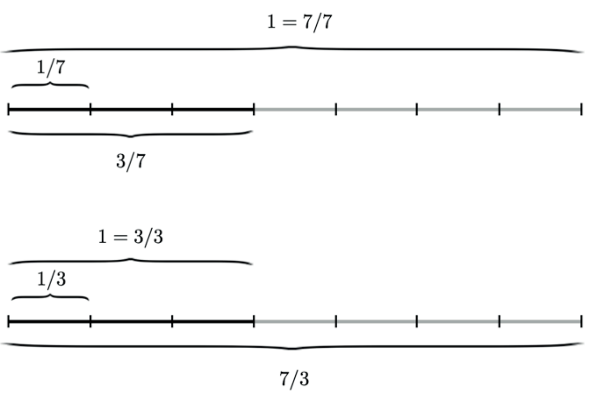
Förhållanden och proportionella resonemang leder oss vidare till bråk som en operator. Bråk som en operator används vid alla former av skalning, som är en av de viktigaste klasserna av situationer för multiplikation i allmänhet. Operatorn a/b transformerar objektet som ska skalas så att det blir a/b gånger så stort. Redan vid tidig ålder kan barn förstå idén om att dubblera och halvera. Inte bara att dubblera eller halvera ett antal utan också att prata om dubbelt eller hälften så långt eller stort. Den här intuitiva förståelsen kan användas för att introducera dubblering som en icke-ikonisk matematisk representation, nämligen multiplikation med det rationella talet 2 och halvering som den inverterade operationen multiplikation med 1/2.

Elevers problem med att använda tal i bråkform som operatorer grundar sig ofta i att de inte ser bråket som *ett tal* utan som två tal skrivna i en division som behöver skrivas om till ett tal i decimalform för att uppfattas som ett tal. Den här uppfattningen är mycket begränsande för elever när de ska arbeta med skalning och proportionella resonemang och beror på att många relationer inte kan uttryckas exakt med en skalfaktor i decimalform. Elever som har svårt att se ett tal skrivet i bråkform som *ett tal* har ofta svårt att svara på frågan: Vad ska du multiplicera 8 med för att få produkten 7? Det här är en intressant fråga när vi undersöker elevernas kunskaper om bråk som operator. Välkända missuppfattningar kan synliggöras med denna enkla fråga. Två scenarion är vanliga. Det ena är att eleven på grund av alltför ensidigt arbete med multiplikation med hela positiva tal har fått uppfattningen att ”multiplikation gör större”. Eleven uppfattar därför situationen som omöjlig att lösa. Det andra scenariot är att eleven söker ett tal mindre än 1 i decimalform. Det är just i det här fallet möjligt att hitta en exakt operator i decimalform men det är mycket mer långsökt än att genast se svaret 7/8. De här missuppfattningarna är vanliga, men också lätta att synliggöra. Det är inte särskilt svårt men det krävs planering av undervisning med situationer av skalning i bråkform för att ändra elevernas uppfattningar. När eleven utan problem behärskar skalning med tal i bråkform, både större och mindre än 1, så har elevens begreppsfält vuxit och vi kan notera en progression i elevens förståelse för bråk som operator.

Tal i bråkform som mått

Den starka traditionen att använda ikoniska representationer av pizzor och chokladkakor för att representera bråk kan överskugga insikten om att tal i bråkform, precis som andra tal, har en plats på tallinjen och att de kan förstås som ett mått på hur långt från noll talet befinner sig. Därför är det viktigt för elevernas begreppsutveckling att de blir presenterade för bråk som mått. Både tal i bråkform där täljaren är mindre än nämnaren och där täljaren är större än nämnaren går bra att representera med tallinjen. Eftersom bråken är en multiplikativ struktur så mäter de på ett enkelt sätt det relativa avståndet till 1. Bråk är ett sätt att mäta och beteckna relationer. Även sådana relationer kan beskrivas med ikoniska representationer, där valet av vad man ser som 1 är avgörande för vad representationerna illustrerar.

Den ikoniska bilden nedan kan användas för att illustrera 3/7 men också för att illustrera 7/3. Om vi säger att hela sträckan är 1 så är delarna 1/7 och hela den svarta sträckan är 3/7. Men om vi låter den svarta sträckan vara 1 så är smådelarna 1/3 och hela sträckan är 7/3.



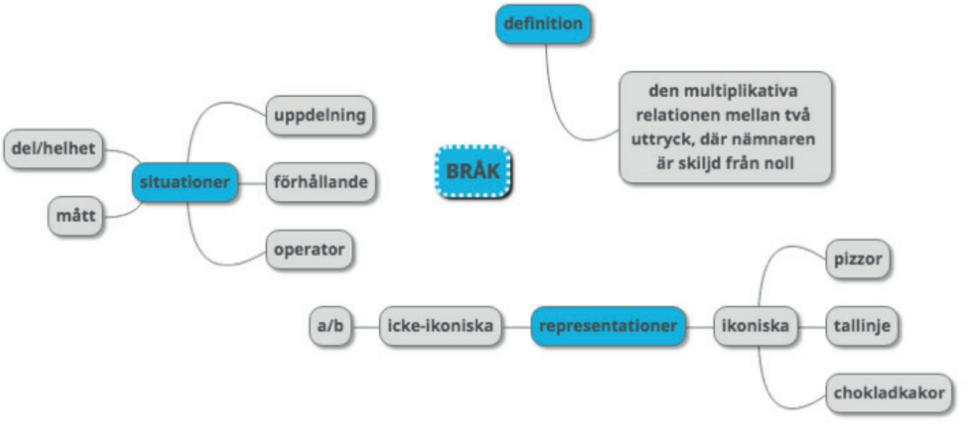
Figur 3. Samma ikoniska representation. Olika betydelser. Man kan notera att om vi i den nedre bilden vill ta reda på hur stor andel 1 utgör av 7/3 så beskrivs detta av uttrycket 1/(7/3). Men i den övre bilden ser vi att det är 3/7. Tillsammans visar alltså dessa bilder att 1/(7/3)=3/7. Det här är ingen praktisk modell att tänka på när man räknar division med bråk. Det är bättre att tänka i termer av att multiplicera täljare och nämnare med nämnarens invers så att man får 1 i nämnaren. Men modellen är ändå intressant att resonera om.

Det vi gör är att mäta något i relation till något annat. I själva verket har de ikoniska representationerna en lite annorlunda roll här. När vi utgår från praktiska situationer, som andelar av en chokladkaka, så är oftast de ikoniska representationerna en slags avbildning av situationen. Då är det mest naturligt att hela strecket får motsvara hela kakan. Men i exemplet ovan har vi så att säga tagit den mentala makten över representationen och låter den illustrera vad vi vill att den ska illustrera. Representationen är inte längre en avbildning av en situation utan en avbildning av en idé. Det är uppenbart att det här sättet att tänka på bråk är mer sofistikerat än vad ett basalt del-helhets-begrepp medger.

Hur det görs är förstås av mindre betydelse än *att* det görs, så att vi kan ge elever goda förutsättningar för progression inom begreppsfältet bråk. Det har dock visat sig att bland representationerna i figur 2 är den som bygger på längder den som är enklast att utvidga till en idé om mått, där någon längd mäts i (multiplikativ) relation till en annan. En fördel med att arbeta med sträckor eller längder på det här sättet är också att tankemodellen ligger nära tallinjen, som är en mycket kraftfull representation. Det här är ett sätt att introducera eleverna till bråk där täljaren är större än nämnaren men det kräver en högre grad av sofistikation än vanliga del-helhets-resonemang.

På det generella planet

Det vi säger genom att studera begreppet bråk är att progression handlar om att få tillgång till flera olika klasser av situationer som ger begreppet mening och sedan behandla dessa situationer med först ikoniska representationer och sedan de formella och högt förädlade icke-ikoniska representationerna som utgör vedertagen matematisk notation. Klasser av situationer som hänger ihop med samma begrepp är inte alltid sinsemellan kompatibla och ger vanligen lite olika insikt om det matematiska begreppets innebörd och användningsområde. Vi kan ofta se det matematiska begreppet ihop med någon viss av alla möjliga klasser av situationer som ett slags delbegrepp.



Figur 4. Bråkbegreppets tre delar: definition, situationer och representationer.

Om vi ser matematiken "nerifrån" är de här delbegreppen olika och det kan ofta tyckas besvärligt att olika saker betecknas med samma matematiska symbolik, som att minustecknen i –5 och 5–3 betecknar olika saker eller att 1/3 både kan beteckna det rationella talet en tredjedel och operationen att dela ett i tre delar. Men som matematikern Henri Poincaré en gång sa: "Matematik är konsten att ge olika saker samma namn." Matematik har kallats "the science of patterns", vetenskapen om mönster. Man identifierar ett mönster och representerar det med matematisk symbolik. Men det går att precisera det här.

Vi identifierar först ett mönster i något observerbart fenomen och sedan studerar vi själva strukturen i detta mönster. Det är denna struktur som vi därefter symboliserar och som blir matematik. Ibland, eller kanske alltid, så uppkommer samma struktur i olika mönster från olika fenomen, dvs från olika klasser av situationer. Det är exakt då olika situationer leder till samma matematiska övergripande struktur som vi har illustrerat med bråk. Olika saker betecknas med samma namn och behandlas med samma symbolsystem.

En av de viktigaste förtjänsterna med matematik är alltså att vi utvecklar avancerade symbolspråk, system av icke-ikoniska representationer, för att enkelt och effektivt kunna hantera de matematiska strukturerna. Dessa representationer är inte bara beteckningar på vissa fenomen utan symbolspråken är i sig en hel kunskapsvärld. Det beror på att i symbolspråket förenas gemensamma egenskaper från många olika fenomen. Vi kan inte genom att studera endast ett av dessa fenomen förstå hela det matematiska begreppets rikedom. När vi betecknar ett del-av-helhetsförhållande med symbolen 5/7 så går vi in i en matematisk värld som är mycket större än vad vi rimligen kan uppfatta genom att utforska delar av helheter. Redan 7/5 är omöjligt att uppfatta som en del-av-helhet om man inte utvidgar sitt sätt att se på vad delar och helheter kan betyda. Men när vi vet att 5/7 också betecknar en division så är det uppenbart att 7/5 också borde existera. Om vi kan dela 5 med 7 kan vi dela 7 med 5. Om vi vill återföra den här insikten till världen av delar och helheter måste vi utvidga vad vi menar med delar och helheter. Det kan vi bara göra om vi först preciserar oss. När vi först jobbar med delar och helheter är helheten ofta implicit. Hela pizzan liksom. Den finns där och bara utgör sin egen helhet. Sedan delar vi den i ett antal lika stora delar (7) och räknar hur många delar vi äter (5) och skriver att vi åt 5/7 av pizzan. Men när vi utvidgar del-helhetsbegreppet, så måste vi först noggrant precisera vad som är helheten (eller snarare enheten, dvs den etta som allt annat relateras till), som vi gjorde i figur 3.

Nästan alla matematiska begrepp börjar sitt liv (hos individen eller hos mänskligheten som helhet) genom att vi identifierar något fenomen i en viss situation. Genom att betrakta likartade situationer kan vi med hjälp av ikoniska representationer frilägga och undersöka fenomenet. Så småningom betecknar vi fenomenet med matematisk symbolik, icke-ikoniska representationer. Det här brukar kallas att gå från det konkreta till det abstrakta. Men så småningom förväntas vi betrakta själva den matematiska idén som något konkret och existerande. Vi förväntas kunna arbete i det icke-ikoniska symbolsystemet. Det abstrakta blir återigen konkret. Det tidigare konkreta utnyttjas fortfarande frekvent som tankestöd, men nu som representation av själva matematiken istället för att matematiken är en representation av det konkreta.

Avslutningsvis vill vi poängtera att progression i begreppskunskap handlar om att elevernas begreppsfält växer så att de kan hantera fler och fler situationer med den predikativa och operationella kunskap de har. Ju fler kopplingar eleverna har mellan olika begrepp, desto mer sannolikt är det att de kan hantera nya situationer med de begrepp de redan har. Vissa justeringar av deras lösningsstrategier kommer att krävas. I allmänhet behöver eleven stöd av läraren eller klasskamrater för att göra justeringarna till den nya situationen. Om eleven vid ett senare tillfälle kan återkalla lösningsstrategien och klara sig själv i en liknande situation så har elevens begreppsfält vuxit. Progression har skett.