Linda Marie Ahl & Ola Helenius

Vad är procedurkunskap?

Författarna diskuterar matematiska metoder och procedurer utifrån kurs- och ämnesplanernas formuleringar. De vill visa att procedurkunskap är ett nödvändigt komplement till problemlösningsförmågan och en mer komplex kompetens än vad många tror. De beskriver och exemplifierar fyra dimensioner av procedurkunskap: flexibilitet, effektivitet, noggrannhet och lämplighet.

Matematik är en abstrakt och generell vetenskap för problemlösning och metodutveckling. Så inleds beskrivningen av matematik i Nationalencyklopedien. Att man löser problem med matematik vet nog alla, men lika viktigt är alltså att utveckla metoder. En metod är en beskriven process för att lösa en uppgift i ett begränsat antal steg. Algoritm, rutin och procedur är andra termer som används för att beskriva ungefär samma sak, och vi kommer att använda alla termerna efter behag. Additionsalgoritmen, liggande stolen och *pq*-formeln är typiska procedurer som var och en kan användas för att hantera en viss klass av uppgifter. Varje procedur hänger tätt samman med en viss klass av uppgifter där den är tillämplig. Liggande stolen är en fantastisk procedur om uppgiften handlar om att beräkna 2015/13, men den är värdelös om uppgiften är att lösa ekvationen $x^2-2x+3=0$.

Ordet uppgift ska inte här bara tolkas som en uppgift i en matematikbok utan det kan också handla om en situation som inte är relaterad till skolan. Något ska helt enkelt utföras och det som ska utföras benämns *uppgiften*. I vårt fall är det sådant som kan utföras med matematik som vi är intresserade av. Det är viktigt att komma ihåg att i hela den här artikeln används termen uppgift i den här meningen, och inte i betydelsen ”uppgift i en lärobok”.

Många vet att det är viktigt att lära sig metoder i skolmatematiken men också att den moderna retoriken om matematikundervisning i högre grad förespråkar konceptuell kunskap, snarare än procedurell, och att arbete med problemlösning där eleverna inte på förhand känner till någon metod smäller högre än utantillinlärning av metoder. Det här är i själva verket inget nytt. Företrädare för skolmatematik har sedan skolmatematikens barndom påpekat detta. Den tyske pedagogen Adolf Diesterweg skriver till exempel i fjärde upplagan av sin bok från 1866 att:

> *Mekanisk räkning är alltså när man utan insikt och medvetenhet följer oförstådda föreskrivna regler. Var och en som gör det här är en maskin, som en klocka, en ångmaskin eller någon annan maskin. Människan ska dock inte vara en maskin, hon hör till de organiska varelserna.*
>
> (Diesterweg, 1866, s 346)

Även i våra dagar förekommer liknande beskrivningar. Efter Skolinspektionens granskning av matematikundervisningen 2010 säger till exempel ett undervisningsråd på Skolinspektionen i en intervju på SVT:

> *Men många lärare tror att de underlättar för eleverna när de låter dem räkna mekaniskt efter en regel [...]. Då gör de eleverna en björntjänst. I och med att eleverna inte har förstått så försvåras deras inlärning framöver.*

Det här sättet att se på saken tycker vi är fel, men som citaten illustrerar är det typiskt, om än inte tidstypiskt, att inlärning och användning av metoder kontrasteras mot förståelse. I själva verket samverkar alltid förståelse och förmåga att använda procedurer. Det här vet de som är riktigt duktiga på matematik. När Lindas duktige storebror hjälpte henne med matematik sa han alltid: ”Handen lär hjärnan. Om du blir tillräckligt bra på att genomföra procedurerna så kommer du så småningom förstå vad du gör.” Samma sak uttryckte Olas handledare under doktorandutbildningen i matematik. ”Man måste först lära sig räkna. Sen förstå.” De är i gott sällskap med sin filosofi. Vygotsky skrev i *Thought and Language* att undervisning föregår utveckling. Han exemplifierar med positionssystemet. Fritt översatt säger han att barnet inte lär sig positionssystemet genom att bli undervisad om det. Istället lär hon sig att skriva siffror, att addera och multiplicera och så småningom växer en mental idé om positionssystemet fram.

I den här artikeln ska vi ge en nyanserad beskrivning av procedurkunskap och också diskutera vad det kan vara. Att fundera på denna fråga är också intressant i relation till den aktuella debatten om faktakunskaper, utantillinlärning och arbetsminne. Att kunna procedurer och rutiner handlar till stor del om att kunna dem utantill, det vill säga att kunna ta fram dem ur minnet och utan åthävor använda dem vid behov. Det är det som kallas att procedurerna ska vara automatiserade. En stor del av finessen med procedurer försvinner när de inte är automatiserade. Det innebär dock inte att ensidig träning på enskilda procedurer är ett bra sätt att lära sig dem så att de ”sitter”. Att ett minne ”sitter” betyder i praktiken inte bara, eller ens huvudsakligen, att man kommer ihåg det, utan kruxet är att kunna *återkalla minnet* vid behov. Så effektiv träning handlar om att träna på att återkalla proceduren i olika och varierande situationer. Då skapas ett rikare nätverk av associationer till proceduren vilket gör det enklare att ”hitta” minnet i framtida situationer. Det här måste en matematiklärare veta, men vi ska inte ägna oss mer åt inlärningsteori i den här artikeln utan koncentrera oss på själva fenomenet metodkunskap. Om man har god metodkunskap, vad är det då man kan och kan göra?

Kursplaner och ramverk

I den svenska kursplanen för grundskolans matematik och i gymnasieskolans ämnesplaner är ett av de framskrivna syftena att eleven ska ges förutsättning att utveckla förmåga att ”välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter” respektive att ”hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.” I både grundskolan och gymnasieskolan poängteras alltså metoder och procedurers roll för framgångsrikt matematikutövande.

De svenska kurs- och ämnesplanerna är i hög grad inspirerade av olika internationellt välkända kompetensramverk, dvs beskrivningar av vad matematikkunskap är och vilka komponenter det kan delas upp i. Två av de mest kända ramverken är *KOM-rapporten* från Danmark och *NCTM Standards* från USA.

Intressant nog tar ingen av dessa två upp rutiner, metoder och procedurer som en explicit förmåga eller kompetens. Skälet för dessa val framgår inte. Kanske är det för att dylika ramverk också är policydokument och att skolmatematiken under alla år snarare har präglats av för stort fokus på procedurer än för litet. Icke desto mindre är procedurer och metoder fundamentala i matematiken och måste tas på stort allvar. Det görs till exempel i ett annat känt kompetensramverk från USA, *Adding it up*, där ett av de fem stråk som utgör skolmatematikens kärna är 'procedural fluency'. Procedurellt flyt, kanske man kan säga på svenska. Vi återkommer till Adding it up efter några exempel på vad procedurer i matematik kan vara.

Några exempel

Räkna föremål. En av de första matematikrelaterade procedurerna som barn lär sig är att räkna föremål. För att utföra proceduren behöver de räkneramsan, dvs orden ett, två, tre, fyra osv. Det är en ramsa som aldrig tar slut och där varje räkneord följs av ett bestämt annat räkneord. Att bestämma kardinaliteten (antalet) av en ändlig och avgränsad mängd föremål görs sedan genom att vart och ett av föremålen i någon bestämd men godtycklig ordning paras med orden i räkneramsan med start på ett och utan att något räkneord hoppas över eller tas om flera gånger. Ett (första föremålet), två (andra föremålet), osv. Denna del av processen är ekvivalent med att ordna föremålen i en lista. Eftersom det finns ändligt många föremål måste till slut ett av dem vara det sista. Detta sista räkneord byter nu roll från att fungera som ett ordningstal matchat med ett individuellt föremål till att blir ett antal som beskriver hela mängdens kardinalitet. De flesta tänker inte ens på det som en procedur och kan inte beskriva exakt hur den går till. Det är alltså fullt möjligt att kunna utföra procedurer utan att kunna beskriva hur de går till eller förklara varför de fungerar.

Potensräknelagar. En annan uppsättning procedurer är reglerna för att hantera potenser, t ex $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$ och $(a^m)^n = a^{mn}$. Dessa procedurer är av ett annat slag än proceduren att räkna föremål eftersom de kan sammanfattas i ett antal likheter eller identiteter som fungerar som procedurer för att utföra beräkningar. Dessa likheter härleds enkelt från definitionen av operationen *upphöjt till* när m och n är heltal men det intressanta är att de gäller även när m och n är reella tal. I själva verket är det vanligt att $a^{(1/k)}$ definieras genom egenskapen att $a^{(1/k)}$ är det tal som upphöjt till k blir a. Och det är så det måste vara för att räkneregeln ovan ska fortsätta att gälla. Att definiera a^x för alla reella tal är mer komplicerat och kräver gränsvärden. Icke desto mindre går det bra att helt obekymrat fortsätta att använda räknereglerna ovan som beräkningsprocedurer närhelst en exponent dyker upp.

Andragradsekvationer. En klassisk procedur i skolmatematiken är den så kallade *pq*-formeln för lösning av andragradsekvationer. En ekvation på formen $x^2 + px + q = 0$ ges av formeln

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

I svensk skolmatematik är *pq*-formeln helt dominerande, medan andra länder håller sig till motsvarande formel för andragradsekvationer på formen $ax^2 + bx + c = 0$. Båda formlerna är en enkel tillämpning av en annan procedur, nämligen kvadratkomplettering. Observera att ett kvadratuttryck lika med ett tal kan hanteras genom rotutdragning och komplettera $x^2 + px$ så att det blir en kvadrat genom att lägga till $\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

Eftersom

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = (x + \frac{p}{2})^2$$

går det att skriva ekvationen som

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$$

Denna kan man sedan lösa med några additiva manipulationer och rotutdragning. Proceduren är i praktiken densamma om den utförs i något konkret fall (med siffror) eller i det generella fallet.

Det finns faktiskt också en annan och begreppsligt mer intressant procedur för andragradsekvationer. Faktorsatsen säger att $x^2 + px + \mathrm{q} = (x - x_1)(x - x_2)$ där x_1 och x_2 är polynomets rötter (som eventuellt är komplexa tal). Multiplicerar vi ihop parentesen får vi $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ och identifikation av koefficienter ger $x_1 + x_2 = -p$ och $x_1x_2 = q$, ett ekvationssystem som alltid kan lösas med elementär aritmetik. Detta kallas Viètes metod och benämns ibland som sambandet mellan rötter och koefficienter. Andragradsekvationer är med andra ord ett område som typiskt hanteras med en mängd olika procedurer.

Procedurer i fyra dimensioner

I ramverket Adding it Up som vi nämnde tidigare beskrivs procedurkunskap så här:

> *Procedural fluency – skill in carrying out procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately.*

Det är en bra beskrivning som är mer precis än formuleringarna i de svenska kurs- och ämnesplanerna. Beskrivningen går inte att översätta rakt av utan att innebörden i flera av orden förloras eller förskjuts, så istället ska vi gå igenom denna mening del för del. Den första delen av meningen fokuserar på att det är själva utförandet av procedurer som är i fokus. Den bästa svenska översättningen av ordet 'skill' är kanske skicklighet. Både 'skill' och skicklighet signalerar att det är någon slags praktiskt kunskapsform, som ett kunnande eller en förtrogenhet som vi har att göra med vilket också förstärks av att det är själva utförandet av proceduren som lyfts fram (inte härledning eller förståelse). I andra delen av meningen beskrivs sedan fyra komponenter av den här skickligheten.

Procedurer ska kunna användas med 'flexibility' dvs flexibilitet som i det här sammanhanget kan betyda flera saker. Proceduren att beräkna potenser som vi nämnde ovan gäller till en början bara när potenserna är heltal, men sedan utvidgas det till alla reella potenser (och faktiskt även komplexa). Det är detsamma som att utvidga klassen av uppgifter för vilka proceduren fungerar. Att kunna använda en procedur flexibelt kan alltså innebära att inte bara vara låst vid vissa specialfall.

En annan aspekt av flexibelt proceduranvändande är att själva proceduren kan justeras lite ibland. En procedur för att lösa ekvationer av typen $ax + b = 0$ är att först subtrahera b från båda sidor, sedan dividera bägge sidor med a. Ekvationen $3x + 5 = 2x - 2$ är inte av typen $ax + b = 0$, men med kunskap om vad proceduren gör och varför den fungerar är det enkelt att utvidga den till att även fungera för $3x + 5 = 2x - 2$. Ett annat exempel på flexibilitet är när barn adderar genom att räkna på fingrarna. Additionen 3 + 8 brukar då hanteras genom att barnet med start på fyra räknar vidare i talramsan och för varje tal sätter upp ett finger tills det ser att 8 fingrar är uppe. Det sist uttalade talet är svaret. Eftersom läsriktningrn går från vänster till höger är det så att säga en mer procedurell procedur att börja från 3. Men som vi snabbt inser är det enklare och effektivare att istället börja från 8 och räkna upp 3. Detta förfarande bygger dock på att vi först gör en bedömning av de två termerna innan vi tillgriper proceduren. Så även om själva proceduren blir mindre kognitivt krävande om vi räknar upp 3 från 8 så tillkommer den kognitiva utmaningen att utföra bedömningen av vilken term vi ska börja med.

Flexibilitet i proceduranvändande kan också handla om olika sätt att utföra samma uppgift. Även om en standardiserad additionsalgoritm (uppställning) i allmänhet är effektiv och lämplig för subtraktion av till exempel ett tiosiffrigt tal från ett annat, är det inte alltid den bästa strategin. Ta till exempel subtraktionen:

$$4\,000\,000\,000 - 3\,999\,999\,999.$$

Den subtraktionsuppgiften löses mycket enklare med hjälp av uppräkning, eller med en jämförelsestrategi, än med en traditionell algoritm.

Adding it up fortsätter sedan med ordet 'accurate'. Det engelska ordet 'accurate' betyder exakt eller noggrant. Exakthet och noggrannhet avser faktiskt något ytterligare än att bara producera ett korrekt svar. I exaktheten ligger också att själva proceduren utförs på det sätt som avses, dvs att receptet följs noggrant. Som vi skrev ovan finns det ibland goda skäl att avvika från en beskriven procedur och göra något annat än det föreskrivna, genom att använda sin kreativitet och kanske sin förståelse för problemet eller uppgiften, eller sin förståelse för proceduren för att justera den lite. Men det är också viktigt att kunna utföra proceduren exakt som den är föreskriven. Det beror på att en av finesserna med procedurer är att de ofta kan utföras nästan utan eftertanke. För en person som är mitt uppe i något annat komplicerat resonemang och behöver utföra någon deluppgift, är det mycket bättre för arbetsminnet att använda en lämplig procedur med så lite tankemöda som möjligt. Och ju bättre man är på att faktiskt följa den föreskrivna proceduren, desto bättre går det här.

Nästa ord i ordningen är 'efficient'. Vi skulle kunna översätta det med effektiv, men faktum är att ordet 'effective' också finns på engelska och 'effective' och 'efficient' har inte riktigt samma konnotationer. Effektivt tenderar att leda tanken till att något ska göras snabbt (tidseffektivt) eller resurseffektivt i någon annan mening. Här blir det procedurens utförande som hamnar i fokus och i någon mening kan man säga att den aspekten redan täcks av noggrannhetsperspektivet ovan. En procedur bör vara effektiv om den ska vara värd att användas. Men som vi nämnde finns det olika procedurer för samma uppgift vilka varierar i effektivitet och lämplighet. Men just eftersom procedurer är procedurer, dvs att de givet att de används korrekt alltid fungerar, så finns det också en annan aspekt av 'efficiency'. Den handlar om den del av den kognitiva processen som utförs innan själva proceduren påbörjas. När man stöter på en uppgift som kan lösas med en känd procedur är det inte alltid effektivt att fundera på om det finns någon bättre procedur. Ibland är det bättre att bara genomföra den första bästa fungerande proceduren man kommer på. Det kan nämligen vara så att uppgiften som ska utföras är en liten del i en större tankegång och att lägga energi på att fundera på hur någon viss deluppgift ska lösas på bästa möjliga sätt kan göra att man förlorar fokus på den svårare huvuduppgiften. Så en viktig del av 'efficiency' handlar alltså om att snabbt och utan vidare eftertanke kunna ta sig an en uppgift. Man tar bara en procedur som gör jobbet och genomför den.

Slutligen använder Adding it up ordet 'appropriately', dvs lämpligt. Den viktigaste aspekten av lämplighet är givetvis att proceduren överhuvudtaget fungerar till uppgiften. Att använda procedurer på uppgifter där de inte är tilllämpliga är ett allvarligt fel och tyder ofta på att elever helt enkelt övergeneraliserar tillämpligheten av någon nyligen inlärd procedur. Men inte sällan är det också ett resultat av en undervisning som i alltför hög grad har etablerat en norm som säger att lösning av matematikuppgifter handlar om att välja en procedur och att det ska gå fort och enkelt att komma fram till en lösning.

Hur hör de fyra dimensionerna av procedurkompetens ihop?

En intressant iakttagelse om de fyra dimensionerna av proceduranvändning är att de är motsägelsefulla. Vi konstaterade ovan att flexibilitet och noggrannhet ibland kan stå i motsats till varandra. Ibland är det bra att modifiera en procedur lite för att anpassa den till ett visst konkret sammanhang. Ibland är det bra att bara följa en procedur slaviskt. På samma sätt kan flexibilitet och effektivitet stå i motsats till varandra. Ibland är det bra att vara flexibel och spendera lite tid på att fundera ut vilken av en mängd olika möjliga procedurer som är bäst att välja. Men andra gånger är det mer effektivt att bara välja första bästa fungerande procedur.

Kanske kan lämplighet fungera som en ram. Lämplighet är ju å ena sidan ett baskrav – om proceduren inte alls är tillämplig för uppgiften, så faller allt annat. Samtidigt är lämplighet ett slags paraply. Vilken procedur som är lämplig beror på sammanhanget där uppgiften ska lösas och lämplighet handlar om överväganden mellan olika aspekter av effektivitet, flexibilitet och noggrannhet.

Så även om 'skill in carrying out procedures' – skicklighet i att använda procedurer – i förstone kanske verkar vara något endimensionellt så är det i själva verket en komplicerad och delvis motsägelsefull kompetens. Ibland är det bra att följa strikt och ibland att modifiera. Ofta vet elever att det finns en mer effektiv procedur att tillgå men eftersom de samtidigt känner sig osäkra på om de klarar att hantera den så förlitar de sig på den mer omständliga proceduren som de vet att de behärskar. Ett exempel på detta är när elever envisas med att räkna ut procentuella höjningar i två steg istället för att använda en förändringsfaktor. Först beräknar de höjningen sen adderar de den till det ursprungliga priset. De vet att proceduren fungerar och det kommer den göra tills det är dags att beräkna upprepade höjningar som ränta på ränta. Då ställs eleven inför procedurens begränsningar och behöver nu flexibelt kunna utvidga den. Läraren behöver alltså ge eleven uppgifter där tvåstegsproceduren inte fungerar om de vill att eleven ska öka sin skicklighet.

Kunskapskravslöshet

Hur relaterar då kurs- och ämnesplanernas kunskapskrav mot den bild av procedurkunskap som vi har diskuterat ovan? I grundskolans kunskapskrav står det:

> *Eleven kan välja och använda i huvudsak fungerande/ändamålsenliga/ändamålsenliga och effektiva matematiska metoder med viss/relativt god/god anpassning till sammanhanget för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter inom aritmetik, algebra, geometri, sannolikhet, statistik samt samband och förändring med tillfredsställande/gott/mycket gott resultat.*

Lydelserna som är separerade med snedstreck betecknar de olika betygsgraderna E, C och A.

Man kan tänka sig att graden av anpassning till sammanhanget handlar om flexibilitet och lämplighet. Termen ändamålsenlig skulle också kunna koda flexibilitet och lämplighet. Däremot är termen *i huvudsak fungerande* ett dåligt val för att beskriva proceduranvändning. Det hade varit bättre att bara skriva *fungerande* (men då möjligen inte helt ändamålsenlig). *I huvudsak* måste rimligen här betyda att proceduren inte fungerar fullt ut. Men då är ju proceduren helt enkelt fel. Den sista delen av kunskapskravet som rör graden av resultatets godhet är också tämligen oklar. En procedur för en viss uppgift löser alltid uppgiften. Det ligger i procedurens natur. Om resultatet blir fel (inte fullgott) så är det antingen fel procedur eller så finns brister i noggrannhet vid utförandet.

För gymnasieskolan lyder kunskapskravet:

> *I arbetet hanterar eleven några enkla/flera/flera procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär med viss säkerhet/säkerhet/säkerhet -/-/och på ett effektivt sätt, både utan och med digitala verktyg.*

I den första delen av detta kunskapskrav är ordet *enkla* egentligen onödigt, för det gör det svårt att bedöma elever som kan enstaka avancerade procedurer. Men annars är det en bra idé att bedöma mängden procedurer en elev kan hantera. Denna mängd kan dels handla om att kunna flera procedurer för samma uppgift och om antalet uppgifter som eleven känner till procedurer för. Den andra delen om säkerhet kan tänkas handla om både hur noggrant eleven klarar att utföra välbekanta procedurer men också hur säker eleven är på att välja korrekta och ändamålsenliga procedurer. För betyget A finns även en formulering om effektivitet. Det ligger nära till hands att tolka detta som att det betyder att eleven inte bara väljer fungerande procedurer, utan också använder procedurer som är anpassade till sammanhanget på så sätt att det inte är alltför resurskrävande.

Om vi skulle få önska nya kunskapskrav som matchar resonemanget om procedurkunskap från den här artikeln så skulle vi bibehålla någon slags kvantifiering av mängden standardprocedurer. Kunskapskravet för gymnasiet är här på god väg. Sedan skulle vi också vilja ha en formulering om noggrannhet. Som vi har argumenterat är det en poäng i sig att kunna följa procedurer till punkt och pricka. Brister i noggrannhet kan leda till fel resultat. Med hjälp av en noggrannhetsdimension går det också att hantera elever som gör olika slarvfel i tillämpningen av procedurer.

En sista dimension av procedurkunskap skulle sedan kunna handla om flexibilitet och effektivitet och söka kvantifiera elevens förmåga att kunna välja bland flera tillgängliga procedurer för samma uppgiftskategori och att göra det på ett för sammanhanget lämplig sätt.

Avslutning

I retoriken om matematikundervisning vill vi gärna uppvärdera kreativitet och flexibilitet, problemlösning och begreppskunskap. Det är bra, eftersom det är dåligt att bara uppfatta matematiken som bestående av standarduppgifter där det matematiska utövandet handlar om att välja rätt procedur. Dessutom har det visat sig svårt att komma ihåg alla procedurer om de inte är ordentligt förankrade i begreppsliga strukturer. Men det är samtidigt inte bra om uppvärderingen av matematikens kreativa och begreppsliga sidor sker till priset av att procedurell förmåga nedvärderas. Procedurer är en fundamental del av matematiken och förmåga att hantera procedurer är omistligt. En grundläggande aspekt av procedurkunskap handlar helt enkelt om att kunna och minnas en ganska stor mängd procedurer och kunna återkalla eller återskapa och använda dessa procedurer vid behov. Allt ifrån att kunna räkna antal, via att utföra olika aritmetiska operationer, till att kunna hantera geometriska standardfrågeställningar, lösa ekvationer av standardtyper och en hel massa andra saker. Procedurer är bra för att slippa tänka ut lösningar till problem på nytt hela tiden, så ju bättre man kan dem, desto bättre tjänar de sitt syfte. Men för att få maximal utväxling på en rimlig mängd procedurer behöver vi också kunna använda dem med omdöme och flexibilitet, för att anpassa dem till olika sammanhang på ett lämpligt sätt.

LITTERATUR

Diesterweg, F. A. W. (red). (1838). *Wegweiser für deutsche Lehrer* (Vol. 1). GD Bädeker.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number.* Harvard University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (red). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. and Jensen, T. H. (2002). *Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*, The Ministry of Education, Copenhagen, Denmark.