Henrik Petersson

Spetsutbildning i matematik vid Hvitfeldtska gymnasiet

I förra numret inleddes en artikelserie under temat *Mattetalanger*. Där diskuterades nationella styr- och stöddokument som lyfter frågor om olika aspekter på särskilt begåvade matematikelevers undervisning. I denna artikel följs den upp med en inblick i hur en gymnasieskola med spetsutbildning i matematik har organiserat sin undervisning för att möta elevers olika behov.

Hvitfeldtska gymnasiet i Göteborg är sedan 2010 en av landets fyra skolor med formell gymnasial spetsutbildning i matematik. De övriga är Danderyds gymnasium, Luleå gymnasieskola och Ehrensvärdska gymnasiet i Karlskrona. Flera andra skolor i landet har egna varianter av matematikintensiva gymnasieprogram. Vår spetsutbildning vid Hvitfeldtska gymnasiet bottnar i en verksamhet som startade redan i början på 1990-talet.

Spetsutbildningarna i landet har vissa likheter, men samtidigt finns det skillnader i både arbetssätt och struktur. I maj 2015 kom Skolverkets stödmaterial *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik*, som också berördes i artikeln *Mattetalanger* i förra numret. Ett gemensamt uppdrag när det gäller spetsskolornas verksamheter är, eller bör vara, att kunna möta särskilt begåvade elevers behov – om inte vi klarar det, vilka ska då göra det? Jag kommer här att beskriva spetsutbildningen vid Hvitfeldtska gymnasiet, hur utbildningen är upplagd och varför.

Varje år antas mellan 20 och 30 elever till spetsutbildningen och eleverna samlas i en och samma klass. Utbildningen är en särskild variant av det naturvetenskapliga programmet, vars valbara delar är vikta åt matematikkurser. Det är värt att påpeka att alla som antas till spetsutbildningen inte faller inom kategorin särskilt begåvad och vår verksamhet är heller inte organiserad utifrån att så skulle vara fallet. Däremot är, kan man förmoda, särskilt begåvade elever relativt sett representerade i högre grad i våra spetsklasser.

Inträdesprov och betyg

Antagning sker utifrån betyg från årskurs 9 tillsammans med ett inträdesprov i matematik som väger lika tungt som betyget. Genom inträdesprovet kan ett svagare betyg kompenseras av en särskild fallenhet för matematik. Eftersom eleven ska klara av utbildningen som helhet kan vi inte bara anta utifrån den matematiska förmågan, därav betygsdelen i urvalet. Antagningsprovet har även andra funktioner, utöver att vara urvalsgrundande. Genom antagningsprovet krävs det av eleven en ansträngning att ta sig till skolan och genomföra provet. Finns det ett motstånd redan här, är förmodligen inte intresset heller tillräckligt stort. Vi söker elever med en viss fallenhet i matematik och som *samtidigt* har en genuin vilja att komma till oss och utvecklas. Vidare innehåller antagningsprovet en problemdel och tidigare antagningsårs problemdelar är offentliga. På detta sätt ger provet en viss indikation av vad eleven kommer att få möjlighet att utveckla hos oss och samtidigt visar provet vilka kvaliteter vi tycker är viktiga. Det är matematisk fallenhet och kreativ förmåga vi värderar, inte huruvida eleven tidigare har varit inne i ett accelererat system och därigenom börjat nosa på gymnasiekurser.

Årskurs 1 och 2

I arbetet med drivna elever, exempelvis särskilt begåvade, finns det två centrala begrepp: *berikning* och *acceleration*. I grova drag handlar berikning om att man gräver där man står, d v s att eleverna ges utrymme för att tränga djupare in i aktuellt stoff. Acceleration syftar till att man rör sig snabbare över ett givet stoff och här tar man fasta på en högre inlärningsförmåga.

I spetsutbildningen på Hvitfeldtska arbetar vi, åtminstone initialt, utifrån berikning. Notera att acceleration inte betyder konstant hög fart, utan att farten trappas upp, man bör inte ha ett högt undervisningstempo utan mål och grund. Vi tror därför på att bygga en genuin plattform. Detta tar sig uttryck i att eleverna redan i årskurs 1 påbörjar en breddningskurs (specialiseringskurs) i problemlösning. Kursen läses under de två första åren i utbildningen, parallellt med kurserna Matematik 1–4. Genom problemlösningskursen ges eleverna möjlighet att stanna upp och tränga djupare in i sådant som de möter i de parallella nationella kurserna. Samtidigt innehåller kursen andra delar som syftar till att förbereda för högre studier, såsom fördjupningskurserna i årkurs 3. Låt mig lyfta fram några centrala delar av problemlösningskursen.

Kurs i problemlösning

En första central del av kursen handlar om att *lära sig ställa frågor vid mötet med matematik*. De flesta lärare har säkert erfarenhet av hur elever kör fast då de inte "ser" hela lösningen framför sig. Som lärare möts du många gånger av ett blankt papper då du kommer fram till en elev med handen uppe. Genom kursen vill vi lära eleverna hur de kan börja nysta i problem, bryta ner problem i delar och bygga vidare från delresultat. Vi vill uppmuntra och skapa verktyg för matematisk kreativitet. Här följer ett exempel på problem som eleverna kan arbeta med i kursen.

> *Problemexempel 1*: En summa av olika positiva heltal kan sägas ha delbarhetsegenskapen då varje term är en delare i summan. Undersök sådana summor.

Arbetsfrågor som eleven kan ställa sig är exempelvis:

- Existerar det över huvud en sådan summa av tal?
- Hur många termer kan en sådan summa bestå av?
- Finns det ett obegränsat antal sådana summor?
- Finns det ett obegränsat antal sådana summor med ett givet antal termer?
- Ingår varje positivt heltal i någon summa med delbarhetsegenskapen?

Här kanske eleven finner att $1+2+3$ är ett exempel på en summa med delbarhetsegenskapen. Däremot finns det ingen sådan summa med två termer. Vidare, när man väl har funnit en summa med delbarhetsegenskapen, säg $1+2+3$, kan man utifrån denna konstruera en ny sådan summa med ytterligare en term genom $1+2+3+(1+2+3)$. Då denna konstruktion fungerar allmänt konstaterar vi att det finns delbarhetssummor av godtyckligt antal termer, tre eller fler. En sista kommentar, kring möjliga slutsatser, är att $an+bn+cn$ har delbarhetsegenskapen, då $a+b+c$ har det, där n är ett positivt heltal (motsvarande gäller för fler termer). Speciellt har summan $n+2n+3n$ egenskapen i fråga för varje heltal $n \geq 1$. Detta visar på ett jakande svar på de två sista frågorna.

En andra viktig del av kursen är att ge eleverna verktyg för att *läsa av satser och bevis, samt att organisera egna bevis*. Detta är viktigt för att kunna möta exempelvis högskolans matematik. Här arbetar vi mycket med begreppen implikation och ekvivalens, och olika bevisföringstekniker. En teknik vi också använder oss av, i sammanhanget, är att låta eleverna bevisa utsagor kring begrepp som de inte har någon, eller begränsad, förförståelse kring. Låt mig ge exempel på problem från kursen:

> *Problemexempel 2:* Ett heltal n är ett lyckligt tal då n kan skrivas $n=a^2+b^2$ för några heltal a och b. Bevisa att om n är ett lyckligt tal så är såväl $4n$ som $2n$ lyckliga tal.
>
> *Problemexempel 3:* Ett positivt heltal n sägs vara enkelt då n är en delare i k för varje heltal k sådant att kn är ett kvadrattal. Visa att om n är ett udda enkelt tal, så är $2n$ också enkelt.

Poängen med att låta eleverna bevisa utsagor kring okända begrepp är att de på detta sätt lär sig hur man arbetar mot nya begrepp i en bevisföringssituation. De tvingas till att läsa av, avkoda, den vid handen givna informationen, och formulera vad som är givet och vad som ska bevisas. En annan fördel med den här typen av problem är att alla står lika inför problemet, det finns ingen förförståelse att falla tillbaka på. Du skapar en *här och nu-situation*.

Ett annat arbetsätt, kopplat till arbetet med satser och bevis, är att låta eleverna granska felaktiga satser och bevis. Ett exempel:

> *Problemexempel 4:* Betrakta följande sats och bevis. Antingen så är satsen korrekt, men beviset felaktigt, eller så är både sats och bevis felaktiga. Undersök vilket som gäller.
>
> *Sats:* Talet $n+2$ är udda om och endast om $3n+2$ är udda.
>
> *Bevis:* Antag att $n+2$ är udda. Vi ska visa att $3n+2$ är udda. Enligt förutsättning kan vi skriva $n+2=2k+1$ för något heltal k, så
>
> $3n+2=3(2k-1)+2=2(3k-1)+1,$
>
> vilket visar att $3n+2$ är udda. Det återstår att bevisa omvändningen, att om $3n+2$ är udda så är $n+2$ udda. Antag att $3n+2$ är udda. Om n är jämnt, $n=2k$, så är $3n+2=6k+2=2(3k+1)$ jämnt, alltså måste n vara udda. Så antag att $n=2k+1$ för något heltal k. Då är
>
> $n+2=(2k+1)+2=2k+3=2(k+1)+1.$
>
> Alltså är $n+2$ udda, vilket avslutar beviset.

Här är sats och bevis båda felaktiga. Satsen gäller bara om n är ett heltal, vilket det inte sägs något om i satsformuleringen. I beviset dyker luckan upp i andra halvan, då det endast behandlar fallen då n är ett udda eller jämnt *heltal*. Om exempelvis $n = 1/3$ så är $3n + 2$ udda heltal, men inte $n + 2$. Det här arbetssättet lär eleverna att vara observanta på detaljer.

En tredje hörnsten i kursen är *matematisk redovisning*. I *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik* betonas även detta arbetsområde. Kursen examineras genom inlämningsuppgifter. Vid bedömningen läggs stor vikt vid kvaliteten på den skriftliga framställningen, både när det gäller struktur och precision i argumentationen. Naturligvis får eleverna här vägledande riktlinjer för hur man organiserar en matematisk text. En teknik som jag också tillämpar är att samla på mig elevlösningar, som jag sedan kan låta efterföljande årskullar diskutera kvaliteten på vid arbete med samma problem. Vad är bra och vad är mindre lyckat? Det är här viktigt att lyfta fram både goda och mindre goda exempel. Detta arbetssätt har mycket bättre effekt jämfört med att jag som lärare presenterar en "kliniskt perfekt" lösning på tavlan.

De nationella kurserna Matematik 1–4

Parallellt med problemlösningskursen läser alltså eleverna Matematik 1–4, en kurs per termin. Även om vi innehållsmässigt är mer begränsade, ger vi även dessa kurser en "spetsinramning" genom arbetssätt och organisation. Det krävs inte extra kurser för att möta drivna elever.

> ” *Vi tror det är positivt med flera mötesytor och kanaler för inspiration …*

Till att börja med möter eleverna en annan lärare än den de har i problemlösningskursen. På detta sätt får eleverna tidigt, från årskurs 1, se olika tolkningar och framställningar av matematiken, samtidigt som det finns en gemensam kärna i lärarnas förhållningssätt. Genom att samla spetseleverna i en klass får de dagligen möta likasinnade och de kan därigenom utveckla varandra, men vi ser alltså även till att de kommer i kontakt med fler än en matematiklärare. Vi tror det är positivt med flera mötesytor och kanaler för inspiration, att exempelvis uppmuntra till deltagande i tävlingsmatematik är i linje med detta. Som lärare försöker vi framför allt låta den metodik eleverna lär sig i problemlösningskursen spilla över till övriga kurser. Som exempel får eleverna inte tro att god matematisk redovisning bara är viktigt inom problemlösningskursen, det trycker vi på i alla kurser.

I våra spetsklasser finns det en stor spridning av elevernas kvaliteter. Så är naturligtvis vardagen för de flesta lärare. Ett arbetssätt som jag själv ofta tillämpar, för att möta detta, är följande. Jag försöker konstruera uppgifter, aktiviteter, som möter såväl de svagare som de starkare på en och samma gång. Detta gör jag genom öppna problemställningar, som är organiserade genom en följd av delproblem som mynnar ut i en mer eller mindre öppen problemställning. Några elever kommer bara en bit in i problemet, medan andra kommer längre, och de riktigt duktiga får genom den öppna inramningen möjlighet att ta ut svängarna. I samband med beskrivningen av problemlösningskursen betonade jag vikten av att kunna ställa frågor. Med detta arbetssätt får eleverna erfarenhet av hur problem kan delas upp i enklare delar. Här ges ett exempel på en sådan aktivitet/problem:

Problemexempel 5:

1. Vilka olika primtalsfaktorer innehåller talet $10^2 \cdot 12^3 \cdot 5^4$?
2. Primtalsfaktorisera talet $10^2 \cdot 2^3 \cdot 5^4$.
3. Formulera ett eller flera villkor som heltalen $x, y, z \geq 0$ måste uppfylla om $10^2 \cdot 12^3 \cdot 15^4 = 15^x \cdot 18^y \cdot 20^z$.
4. Undersök om det finns heltal $x, y, z \geq 0$ sådana att $10^2 \cdot 12^3 \cdot 15^4 = 15^x \cdot 18^y \cdot 20^z$.
5. Undersök exempel på heltal $a, b, c \geq 0$ sådana att det inte finns heltal $x, y, x \geq 0$ med: $10^a \cdot 12^b \cdot 15^c = 15^x \cdot 18^y \cdot 20^z$.
6. Undersök villkor på heltalen $a, b, c \geq 0$ som garanterar att det finns heltal $x, y, z \geq 0$ så att: $10^a \cdot 12^b \cdot 15^c = 15^x \cdot 18^y \cdot 20^z$.

Den unika lösningen i 4 är $x = z = 3$, $y = 2$. I samband med punkt 5 kan fall av icke existens av lösning finnas exempelvis utifrån fallet $a = c = 0$. I detta fall måste $x = z = 0$, så vi står inför att visa att det finns heltal $b \geq 0$ så att $12^b \neq 18^y$ för alla heltal $y \geq 0$. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för lösning i punkt 6 är: $a + b$ är delbart med 5 samtidigt som $4b \geq a$ och $2a + 5c \geq 3b$.

Problemet skulle kunna tillämpas i samband med arbetet med linjära ekvationssystem i Matematik 2c. Alternativt passar det som problemlösningsuppgift i arbetet med primtal och/eller potenslagar i Matematik 1c och vi kan då nöja oss med delproblemen 1–4.

Årskurs 3

Inför årskurs 3 har eleverna med sig Matematik 1–4 samt problemlösningskursen. I trean läser eleverna Matematik 5 följt av två specialiseringskurser fyllda med ”högskolestoff”. Studietakten accelereras därmed en aning, vilket vi lagt grunden för under årskurs 1 och 2.

En del av spetsutbildningarnas uppdrag är att erbjuda möjlighet att ta upp till 15 högskolepoäng i matematik vid en värdhögskola, i vårt fall Chalmers och Göteborgs universitet. Här ser lösningarna lite olika ut på de gymnasieskolor som har spetsutbildning. I vårt fall bedriver vi all undervisning själva. Innehållet i en av våra specialiseringskurser motsvarar helt eller delvis en högskolekurs. Eleverna erbjuds möjlighet att tentera vid matematikinstitutionen Matematiska vetenskaper, gemensam för Chalmers och Göteborgs universitet. Många elever inspireras av att på detta sätt prova på högskolans krav och matematik, men känner samtidigt att högskolepoängen kan kvitta och examinerar endast vår lokala kurs. Utbytet med Chalmers och Göteborgs universitet består i studiebesök, exempelvis i form av deltagande i enstaka föreläsningar. Innehållet i den andra specialiseringskursen planerar vi helt själva. Syftet med specialiseringsverksamheten i årskurs 3 är att eleverna ska få känna på högskolemässig framställning av matematik. Syftet är inte att eleverna ska ”beta av” inledande högskolekurser. Med andra ord tänker vi på liknande sätt här i övergången mellan gymnasiet och högskolan, som vid övergången mellan grundskolan och gymnasiet, i arbetet med duktiga elever: kvalitativ fördjupning framför kvantitativ jakt på kurser.

En anledning till att vi bedriver även den högskolerelaterade undervisningen själva är att vi på skolan på så sätt kan utvecklas och hålla oss på tå. Vi är två lektorer som undervisar på spetsprogrammet, med både forskarverksamhet och eftergymnasial undervisningserfarenhet i bagaget, så kompetensen finns hos oss. Vidare ger det oss möjlighet till en mer riktad feedback till våra elever, till skillnad mot om vi hade satt våra elever tillsammans med ett större antal studenter i en föreläsningssal. Vi vill utnyttja möjligheten att få våra elever att förstå sina framsteg och sin fallenhet. Men det finns även en djupare aspekt av varför vi vill organisera den högskolemässiga delen av utbildningen själva.

Vårt mål med spetsverksamheten är att lägga grunden och uppmuntra till vidare studier i matematik. Här kanske det inte är inledande högskolekurser i algebra och analys som bäst förmedlar vad fördjupning i matematik innebär. Genom att vi planerar verksamheten själva är vi flexibla och kan beröra moment som traditionellt ligger längre fram i högskolans matematik och som exempelvis en ingenjörsstudent inte kommer att få möjlighet att möta i sin utbildning. Här kan nämnas begrepp som grupp, vilket våra elever får bekanta sig med redan i problemlösningskursen, som fångar väldigt mycket matematik och som exemplifierar hur man i den högre matematiken söker strukturer.

Avslutande kommentar

Gemensamt för spetsutbildningarna är att spetseleverna redan från årskurs 1 samlas i en och samma klass. Jag har pekat på fördelarna, men det finns även utmaningar kopplat till detta. Med det system vi har idag så sätts klassen eller gruppen redan första året. Vi har inget fönster där vi kan ta in elever som senare kommer på att de vill läsa hos oss. Jag är övertygad om att vi missar många förmågor som också skulle ha trivts hos oss, men som av olika skäl tvekar. Om en elev hoppar av utbildningen kan vi inte heller fylla på. Därför är det särskilt viktigt att de elever som vi antar inte bara har en fallenhet för matematik, utan att de även är genuint motiverade att följa vårt program. Kanske man kan hitta en mjukare övergång in i spetsverksamheten, med fler öppna dörrar? Före 2010 hade vi ett annat system då vi samlade spetselever från olika klasser på skolan i en matematikgrupp. Det upplägget var något mer flexibelt.

LITTERATUR

Eriksson, C. & Petersson, H. (2015). *Särskilt begåvade elever – ämnesdidaktiskt stöd i matematik*. Finns enbart som pdf på Skolverkets webbplats.

Mattsson, L. & Pettersson, E. (2016). *Mattetalanger.* Nämnaren 2016:1.

Petersson, H. (2013). *Problemlösningens grunder.* Lund: Studentlitteratur.

Petersson, H. (2015). *Om begreppet begrepp.* Nämnaren 2015:4.