ANETTE JAHNKE

Varför förenkla när vi kan förkrångla?

Denna artikel handlar om att variera arbetssätt på gymnasiets kurser. Med exempel från geometri, algebra och talteori och med historisk anknytning berättar författaren om sin undervisning.

En tesked aritmetik. En klick geometri. Sen en klick till i kurs D. En skvätt algebra här och där. Några strödda funktioner. Derivata, integraler och en nypa differentialekvationer. En touch komplexa tal. Och så en dos diskret matematik som extra tillbehör för dem som så önskar.

Detta var mitt första intryck när jag som nyanställd lektor i matematik vid Hvitfeldtska gymnasiet i Göteborg på allvar började läsa kursplanen i matematik. Intrycket grundade sig på vad som stod under rubriken *Mål att uppnå*. Under rubriken *Mål att sträva mot* och i beskrivningen av ämnets karaktär och uppbyggnad mötte jag dock det ämne som jag så väl kände sen mina forskarstudier i matematik. Där fann jag svängrum för att göra gymnasiematematiken meningsfull för eleverna.

Även om det är svårt att se på sig själv utifrån, har det för mig varit utvecklande att ständigt reflektera över *vad* jag gör som lärare, både matematiskt och metodiskt – och *varför* jag gör så. I denna och i en kommande artikel kommer jag att beskriva ett antal klassrumsaktiviteter eller episoder. Även om aktiviteterna kan te sig spontana så är de välplanerade och baserade på erfarenheter av elevers reaktioner i liknande situationer. Men jag håller alltid dörren öppen för nya infallsvinklar som kan berika lektionen och sedan kanske bli uppslag för en helt ny lektion. Alla aktiviteter innehåller en dos av hjärtlig provokation, med syfte att leda eleverna mot nya upptäckter som till exempel i följande laboration.

Godismatematik

När eleverna kommer in står jag och äter ur en mycket stor godispåse. Medan jag tuggar förklarar jag att det är dags för laboration. Eleverna delas in i par och får ett papper med en cirkel på, sax, tejp och linjaler.

> Ni ska klippa ut cirkeln och forma den till en kon, säger jag och tar ett par extra sockerbitar i munnen. Det par som fortast lyckas forma en kon med största möjliga volym kommer att få sin kon fylld med godis. Eftersom det är godis som står på spel är jag mycket mycket petig! Jag vill se fullständiga lösningar.

Problemet innehåller användning av Pythagoras sats, och beroende på vilken variabel eleverna väljer att bryta ut blir det mer eller mindre lätt att derivera. Problemet är inte helt enkelt. ”Men ju längre tid det tar desto bättre, för då får jag mer godis”, säger jag till eleverna. Lektionen brukar bli mycket aktiv – och naturligtvis får alla jobba färdigt och får sin kon fylld med godis.

Varför?

Det finns många olika arbetssätt man kan använda sig av i klassrummet: grupparbete, laborativt arbete, föreläsning, filmvisning osv. Laborativt arbetssätt bidrar till att eleverna får se och känna i matematik.

Moderna tillämpningar

Jag sparar också på dialoger. Jag vet att vid ett visst tillfälle, i samband med något begrepp, så kommer en reaktion från eleverna – positiv eller negativ – som jag kan ta hand om med hjälp av en dialog, som i följande episod. I samband med ett litet avsnitt om primtal i läroboken för kurs A:

– Anette, hur gör man? suckar eleven.
– Avgör om 131 är ett primtal, läser jag högt. Vet du vad ett primtal är?
– Ja, ja, det går inte att dela ..., säger eleven.
– Vadå, dela?
– Förutom med ett och talet själv, suckar eleven. Men, Anette, hur gör jag då? Jag har läst det här om Erastho...erastollens metod. Men sluta ... jag kan inte sitta här och skriva upp en massa tal och stryka.
– Hmm ... du kan ju prova att dela talet med 2, 3, 5, 7, och så vidare. Prova. Sen kan du ju fundera på hur länge du måste testa ...
– till ... 131? Huga, stönar eleven.
– Hmm ... du får fundera ... kanske finns något tips i texten här.
– Ja, jag kan kolla ..., säger eleven tveksamt.
– Du är inte nöjd?
– Det finns en metod, va? Men du säger den inte? Det måste ju finnas en metod för att avgöra om ett tal är primtal eller inte, säger eleven och lägger ifrån sig penna och papper demonstrativt.
– Nej, än så länge är det ingen som har hittat en metod, säger jag.
– Du skämtar, det kan väl inte vara så svårt! utbrister eleven och sträcker sig efter grafräknaren.
– Men du kanske kan hitta en? Om du gör det så blir du säkert miljonär flera gånger om ... eller möjligtvis mördad.
– ??! Vad snackar du om?

[1] Kopplat till serien finns klassrumsaktiviteter, se www.weallusematheveryday.com/tools/waumed/home.htm

Denna dialog kan ha effekten att kompisarna på raden framför vänder sig om och undrar vem som ska mördas. Uppmärksamheten är fångad och jag kan kort berätta om faktoriseringens betydelse för kommunikation via nätet och tipsa om ett avsnitt i TV-serien *Numbers*[1] där detta var i fokus eller om *Kodboken* av Simon Singh.

Varför?

Dialogen tjänar till att uppmärksamma eleverna på att allt inom matematiken inte är löst – den utvecklas fortfarande.

Samband mellan begrepp

Ett annat tillfälle då man kan få en irriterad reaktion från elever är när man i kurs E introducerar komplexa tal och talet *i*. Får man göra så? undrar eleverna. Men de olika talen och dess egenskaper kan man introducera långt tidigare än i kurs E genom följande tankelek. En av de första lektionerna i kurs A inleds med att jag lägger på en OH-bild och säger:

> – Vi ska nu göra ett tankeexperiment. Föreställ er att ni bara kan talen 1, 2, 3, 4, 5, ... Kan ni lösa följande ekvationer?

På OH-bilden avslöjar jag sakta olika ekvationer: $x + 1 = 6$, $x - 4 = 1$, $x + 2 = 2$.
– Ja, ja och nej! ropar eleverna.
– Men vad gör vi då? frågar jag. Då får vi uppfinna ett nytt tal. Vad ska vi kalla det? Hur ska vi beteckna det? Vilka egenskaper ska det talet ha?

Eleverna uppmanas att komma med förslag på namn och beteckningar, jag provocerar genom att rita mer eller mindre fantasifulla förslag på beteckningar på tavlan. Till slut nöjer vi oss med namnet *noll* och vår vanliga beteckning 0, vars historiska bakgrund jag tar upp. Vi fortsätter:

– I en värld med bara 0, 1, 2, 3, 4, ... , kan vi lösa ekvationer av typen $x + 5 = 10$, $x + 5 = 0$?
– Ja och nej!
– Men vad gör vi då? Vi uppfinner nya tal! Vad ska vi kalla dessa? Vad tycker ni? Hur ska vi beteckna dem? Vilka egenskaper ska de ha? Kan vi illustrera dem?

Återigen uppmanas eleverna att komma med förslag på namn och beteckningar. Jag glömmer aldrig klassen som ville att minus två skulle betecknas med $Lasse_2$ vilket ger att $2 + Lasse_2 = 0$. Vi landar till slut i de negativa talen. Intressant att notera är att det var först på 1600-talet man kom på idén att geometriskt illustera de negativa talen åt motsatt håll som de positiva talen (Albert Girard (1595–1632), se *A history of mathematics)*.Sen fortsätter jag, med elevernas hjälp, att introducera rationella tal, reella tal och till slut når vi ekvationer av typen $x^2 = -1$.

– Jaha, vad gör vi nu då? säger jag.
– Uppfinner fler tal? säger eleverna tveksamt.
– Javisst, vi brukar beteckna det med *i* och kallad det *imaginärt*. Då kan vi bilda de komplexa talen.
– Öööö ... , stönar eleverna.
– ... men de komplexa talen tillhör kurs E, säger jag, och det går en susning av lättnad genom klassrummet.

Nu kan jag berätta vidare för eleverna att när vi nått de komplexa talen är vi på ett sätt faktiskt färdiga. Algebrans fundamentalsats säger att varje polynomekvation med komplexa koefficienter har en komplex lösning. Men är varje tal en lösning till en polynomekvation? Nej, det finns tal som inte har en tillhörande ekvation så kallade transcendenta tal, t ex π. De är dessutom oändligt många.

Om man genomför ovanstående resonemang i senare kurser kan man introducera fler ”tal”, så kallade kvaternioner. Dessa har ingen koppling till lösningar av ekvationer. Kvaternionerna utvecklas istället ur följande fråga: Om de komplexa talen kan ses som punkter i planet, går det då att hitta punkter i rymden som svarar mot ett talsystem? Svaret är nej, fyra dimensioner behövs. Dessutom kan vi inte få systemet att fungera med alla våra vanliga räkneregler, vi tvingas att prioritera vissa och släppa den kommutativa lagen.

Frågorna som dyker upp under denna lektion handlar ofta om – får man göra så här och bara hitta på tal inom matematiken? Är det så här man gör? Vad betyder punkterna när man skriver 1,2,3, ...? Senast fick jag följande fråga:

– Men, Anette, är alla ekvationer lösta?

Naturligtvis inte. Algebrans fundamentalsats gäller för polynomekvationer. Dessutom vet vi bara att en lösning finns, vi vet inte alltid hur vi ska hitta den. Man har till och med bevisat att för polynomekvationer av gradtal fem och högre finns det ingen allmän formel för lösningarna. En formel bestående av de fyra räknesätten samt roturdragningar mellan ekvationens koefficienter existerar inte. Googla på Galois! Dessutom kan vi inte alltid skriva ner ett explicit tal som lösning, ibland kan vi bara beskriva lösningen genom att ta fram en bra algoritm som gör att vi kan beräkna ett närmevärde åt gången. Naturligtvis finns det även ekvationer som helt saknar lösning, t ex

$$\frac{1}{x} = 0.$$

Om vi antar att det finns ett sådant tal, vilka egenskaper skulle det ha?

Elever brukar veta att ”man inte får” dividera med noll. Men varför inte? Det är en underbar uppgift att utmana elever med. Det kan väl inte vara så farligt att dividera med noll?

Hela diskussionen kring tal avslutar jag med högläsning ur Peter Hoegs bok *Fröken Smillas känsla för snö*. I boken finns ett underbart avsnitt där hela talsystemet beskrivs samtidigt som romantiken flödar mellan Smilla och en man som kokar fisksoppa!

Varför?

Att det finns samband mellan olika begrepp inom matematiken är inte självklart. Det är t ex rätt konstigt att diverse raka streck på en tavla går att representera med algebraiska uttryck. Det infinner sig en spänning hos eleverna när man under en av de första lektionerna gläntar på dörren och tjuvkikar på innehållet i den sista kursen på gymnasiet. De komplexa talen har vi sedan som en bakgrund när vi studerar andragradsekvationer. Reella talen får en tydligare mening, eftersom eleverna vet att det finns mer runt hörnet. Men hela episoden hänger på att eleverna deltar aktivt i tankeleken – det är deras reaktioner som för aktiviteterna framåt, vilket nästa episod verkligen visar.

Varför förenkla när vi kan förkrångla?

Vid en lektion i samband med rationella uttryck i kurs C introducerade jag följande uppgift:

– Kan ni förenkla denna monsteruppgift?

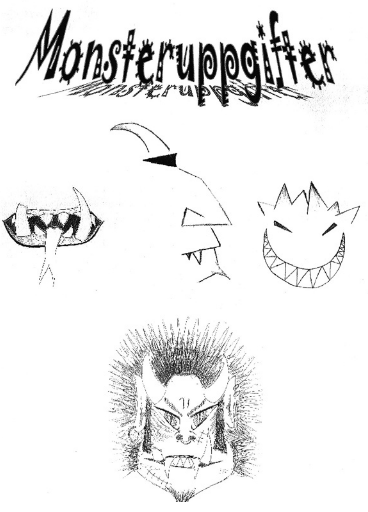
$$\frac{(2z+3z^3)(24z^2+162-396z)(6z+3z^2+3)(7-14z+7z^2)(65z+5z^2)}{(22z-18)(5z^2-5)(7z+91)(6z^5-6z)(121z^2-81)}?$$

Klassen fnissade. Vissa tyckte det blev en sport att försöka knäcka den. Men så hörde jag en elev längst fram till vänster viska och genast fällde jag ut mina jätteöron:

– Varför gör vi inte tvärtom, viskade eleven.
– Va? Menar du att vi ska förkrångla?
– Njaaa ..., svarade eleven.
– Självklart! utbrast jag.

Sen den lektionen har förkrångla varit standardinslag i min undervisning. Ibland bestämmer vi gemensamt vad det vackra rationella uttrycket ska vara, eller så får alla producera ett vackert uttryck som sen läggs i en hatt och var och en får dra en lott. Uppgiften är sen att producera en "förenkla-uppgift" eller "visa-att-uppgift" genom att förkrångla det vackra rationella uttrycket.

Jag minns en elev som kom fram med en lapp, där en annan elev slarvigt skrivit ner ett rationellt uttryck. Eleven frågade mig om det stod en tvåa eller ett z på lappen. Vi tittade på varandra och insåg samtidigt vilken frihet vi hade – det är ju mycket roligare att förkrångla $\frac{1}{4a+z}$ än $\frac{1}{4a+2}$. Två variabler!



Eleverna ska också producera en lösning på sin "förenkla-uppgift". Rätt snart upptäcker de att de inte kan förenkla sin egen uppgift! Faktorisering är svårt. Alla monsteruppgifter med lösningar samlas in och kopieras och används sen t ex vid repetition inför prov.

Varför?

Min erfarenhet av att vända på resonemangen är att eleverna på allvar inser vitsen med att förkorta och förlänga. De får även möjlighet att vara kreativa. Ett annat sätt är att använda *Jeopardy*, vilket jag brukar göra på prov, t ex i kurs B:

> Konstruera en uppgift som ger svaret $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Det ger upphov till många intressanta diskussioner efter provet.

Viljan att förklara

Algebra kan ju för många te sig som helt meningslöst. Just mening letar många elever efter. Ett sätt kan vara att tala *om* matematik som i nästa exempel.

I kurs D ingår differentialekvationer som kan användas för att skapa modeller av något verkligt fenomen, t ex hur bakterier förökar sig. I samband med detta berättar jag om vad som kan ha bidragit till att utveckla matematiken. Människan har en benägenhet att vilja förklara olika fenomen. Vissa av dem är verkliga. I samband med det utvecklas ny matematik för att användas för att t ex kunna begripa hur äpplen faller, hur väder beter sig eller hur man bäst skadar en tumör. Men matematikerna vidareutvecklar också matematiken utan någon förankring i verkligheten. De utvecklar teorier som svävar uppe bland molnen. Flera hundra år senare kan det hända att en teori får en tillämpning och används för att beskriva något verkligt fenomen. Praktiska problem kring förhållandet mellan omkrets och area ledde exempelvis till att babylonierna ca 1800 f Kr löste andragradsekvationer. Matematikerna fortsatte att fundera kring dessa ekvationer, och Cardanos student Ferrari trotsade på 1500-talet sin mästare genom att även lösa fjärdegradsekvationer. Cardano skrev i sin bok Ars Magna att

> *For a position (the first power) refers to a line, quadratum (the square) to a surface, and cubum (the cube) to a solid body, it would be very foolish for us to go beyond this point. Nature does not permit it.*

Men Ferrari, och fler med honom, drevs av sin vilja att förklara även overkliga fenomen och på vägen uppfanns komplexa tal. Dessa ”fantasital” landade sen i Skåne 1989, i mitt knä på Pauliskolan då jag som sjuttonåring använde dem för att beskriva hur strömmen beter sig i elektriska kretsar. Fascinerande!

Men matematiken missbrukas lätt och vi människor har en benägenhet att ibland likställa den matematiska modellen med verkligheten och glömma de antaganden och förutsättningar vi själva gett modellen. Komikerparet Anders & Måns gjorde en skämtsam undersökning om glasögonens storleken vid olika årtal. De fick då fram några punkter i ett koordinatsystem som de ritade en kurva igenom. Kurvan utvidgades åt vänster och höger och de drog slutsatser i stil med att glasögonen blir 1 mm stora 2050 medan glasögonen på 1500-talet kunde täcka sundet mellan Malmö och Köpenhamn!

Varför?

Kan man föra sådana här resonemang med elever? Ja, min erfarenhet är att de är mycket intresserade av att ta ett steg tillbaka och betrakta matematiken från sidan. Jag vill som lärare visa både fascination och distans till ämnet. Det var matematikens egendomliga förmåga att helt plötsligt bli tillämpbar som fångade mig som matematikstudent, inte problemlösning som så många är roade av. Men problemlösning kommer i nästa artikel där jag introducerar bambipedagogik och tvingas redogöra för var i huset mina barn sover. Jag ska även försöka förklara hur jag får tid till dessa aktiviteter. Under tiden kan ni surfa in på www.anettejahnke.nu där ni möter ett annat sätt att gestalta mitt arbete som matematiklärare.

LITTERATUR

Hoeg, P. (1994). *Fröken Smillas känsla för snö.* Stockholm: Norstedt.

Katz, V. (1983). *A History of Mathematics.* New York: Harper Collins.

Singh, S. (1999). *Kodboken*. Stockholm: Norstedt.

Några webbadresser:

Under Arkiv X-tra på Nämnaren på nätet: namnaren.ncm.gu.se finns *Kryptoskolan*

www.weallusematheveryday.com/tools/waumed/home.htm

www.anettejahnke.nu