

# Mindre räknande – mera tänkande

*I artikeln diskuteras matematikens logiska komponenter, och hur undervisningen kan förändras för att stimulera till ökat tänkande och mindre räknande.*

I folkskolan hade man under min skoltid ämnesbeteckningen räkning, men år 1955 fick ämnet heta matematik, den beteckning som redan fanns i de högre skolformerna. Kom detta att också innebära en förändring av undervisningens innehåll och utformning? Ger de båda orden räkning och matematik olika associationer? I denna artikel vill jag förmedla tankar och idéer kring dessa frågor.

## Hur ser eleven på matematik?

Frågar man en nybörjare vad han/hon tror att matematik är, får man i de allra flesta fall till svar att det är att räkna, skriva siffror i en bok, vända blad och vara duktig. För matematik är något viktigt och svårt! Men bra att kunna tycker de flesta, annars kan man t ex bli lurad då man handlar. Följande episod belyser också elevens uppfattning av vad som anses vara matematik.

Under min rektorstid övertog jag ibland lektioner i klasser, om deras lärare behövde vara ledig några timmar för läkarbesök eller liknande. Vid ett sådant tillfälle hade jag några timmars matematik med en sjätteklass. Eftersom de höll

på med skalbegreppet tog jag med mig ritningar över skolgården. Skolan var nybyggd och ritningarna var aktuella.

Eleverna fick långa måttband och uppmanades att mäta upp en hel del avstånd och anteckna för att sedan jämföra med arkitektens ritningar. Det blev ett intensivt diskuterande och beräkning. De upplevde sig som kontrollanter och arbetade med stor entusiasm. Ibland upptäckte de avvikelser och då var det ju extra spännande.

Då vi skildes åt och eleverna skulle gå hem, vände sig en av pojkarna om och sa: ”O, så roligt vi har haft! Och så har vi inte haft matte på hela dagen!” I hans tankevärld kunde det som de gjort inte vara matte och matte brukade dessutom inte vara roligt. Den uppfattningen är han tyvärr inte ensam om.

Eleverna ser ofta på matematiken i ett kortsiktigt perspektiv. Det viktigaste är att få rätt resultat, dvs som stämmer med Facit. Det formella är helt dominerande.

Vad uppgiften egentligen handlar om och vilken information som lämnas är mindre väsentligt. Följande episod får belysa detta.

*Gudrun Malmer är  
fil. hedersdoktor i  
utbildningsvetenskap vid  
Göteborgs universitet, och har  
lång pedagogisk erfarenhet från  
skola och lärarutbildning.*

Vid ett besök i en åk 8 arbetade en elev med en textuppgift. Det gällde att beräkna räntan för ett helår på ett lån på 65 700 kr efter en räntesats på 12,25 %. Efter "knappptryckning" fick han svaret 804 825 kr. Jag undrade då lite försiktigt om det inte varit bättre att betala lånet, som ju endast var 65 700 kr. "Vadå?" sa eleven och fortsatte att bläddra fram svaret i Facit. Lättad av att finna det, klämde han dit ett decimaltecken så att svaret blev 8 048,25 kr. Han såg på mig med en viss triumf och sa: "Siffrorna var i alla fall rätta!"

Jag tyckte att det kunde vara lämpligt med ett litet samtal. Det visade sig att han bodde i en villa och han var ganska säker på att de hade lån på fastigheten. Hur mycket visste han inte. Då jag undrade hur det skulle vara om banken vid räntebetalning krävde ett hundra gånger större belopp än vad det borde vara, reagerade han verkligen med ganska kraftiga kommentarer. Visst är det skillnad på verklighet och skolmatematik!

Det är nog många som under skoltiden inte inser hur viktig matematiken är. Elever inser vanligen heller inte att de egentligen sysslar mycket med matematiska beräkningar utan att fundera på att det är matematik. Då tycks det för övrigt fungera bättre!

Om och hur medvetna och motiverade eleverna blir beror i högsta grad dels på lärarens egen attityd till ämnet och dels på undervisningens utformning och arbetsätt. Det krävs verkligen ett harmoniskt samspel mellan lärarens pedagogik och elevernas förutsättningar, mellan teori och praktik.

## Räkna och tänka

Matematik är både att räkna och tänka. Det finns anledning att ta del av några formuleringar i våra styrdokument:

*Skolan skall i sin undervisning sträva efter att eleven*

- *får tilltro till det egna tänkandet och den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer,*
- *inser värdet av och kan använda matematikens språk, symboler och uttrycksformer,*
- *förstår och kan använda logiska resonemang, dra slutsatser och generalisera samt muntligt och skriftligt förklara och argumentera för sitt tänkande.*

Dessa formuleringarna tycker jag tydligare än i tidigare läroplaner betonar det logiska inslaget. Däremot tror jag inte att undervisningen ännu i tillräcklig grad ändrat karaktär i den omfattning som våra styrdokument föreskriver. Det finns ju alltid en viss eftersläpning och konservatism.

Då lärare i dag försöker att frigöra sig från den konventionella algoritmräkningen och i stället öva huvudräkning/överslagsräkning kan detta mötas av miss-tänksamhet från föräldrar, trots att man i arbetslivet anpassat sig till den teknik vi i dag har tillgång till. Orsaken är att de i många fall vill känna igen ämnet från sin egen skoltid och att de därmed tycker att de lättare kan hjälpa sina barn.

Men en förändring av matematiken, där fokus flyttas från *räkandet till tänkandet*, är alldeles nödvändig. (Malmer, 2002b).

Det kan vara intressant att påminna om det tänkande som Platon (427–347 f.Kr.) under antiken gav uttryck för. Han hävdade nämligen att det fanns två sidor av matematiken, en för den stora massan och en för filosoferna. Den senare matematiken var ett redskap för att öva intellektet.

Detta synsätt har det funnits många uttryck för senare. Jag vill gärna lyfta fram ett citat av en person som haft ett mycket stort inflytande på den svenska matematikundervisningen, nämligen Fritz Wigforss (1886–1953). Citatet är hämtat från hans flitigt lästa bok *Den grundläggande matematikundervisningen* (1925):

*Knappast något av skolans övriga ämnen torde så bra kunna befördra tankens reda och klarhet. Det måste därför betraktas som en väsentlig uppgift för matematikundervisningen att verka bildande på eleverna i logiskt avseende.*

För nutidens människor krävs det ständigt nya utmaningar, inte minst vad det gäller att anpassa sig till ett alltmer automatiserat liv. Den manuella betjäningen ersätts i ett accelererande tempo av automatik. För detta krävs ett välutvecklat språk för att förstå instruktioner. Men därutöver behövs ett stort mått av logiskt tänkande för att omsätta instruktionerna i handling.

Skolans undervisning måste i detta avseende på ett mera målmedvetet sätt förbereda eleverna för det kommande vuxenlivet. Här har undervisningen i matematik en nyckelroll för att "befördra tankens reda och klarhet".

## Olika tankeprocesser

Många forskare har intresserat sig för barns tankestrukturer. Den ryske språkpsykologen Lev Vygotskij (1896–1934) betonar speciellt språkets stora betydelse för tänkandet och medvetandets framväxande. Han framhåller att språket är ett kommunikationsmedel och förhållandet mellan tanke och språk är en levande process.

Vygotskij framhåller också hur förse- ningar i den språkliga utvecklingen hindrar barn från att utveckla det logiska tänkandet och därmed begreppsbildningen. Detta belyser i hög grad den stora betydelse som språket har för att utveckla tankestrukturer.

Inför lösningen av matematiska problem uppvisar elever stora variationer, kanske större än i något annat ämne. Som lärare kan man lätt urskilja yttergrupperna, elever som har en matematisk förmåga och elever med uppenbara svårigheter i ämnet.

En annan rysk forskare som sysslat mycket med att utforska och jämföra de faktorer som uppvisar skillnader mellan de nämnda grupperna är V. A. Krutetskii (1976). Han skiljer i detta sammanhang på förmåga och färdighet. En förmåga hör samman med individens personlighet, medan färdighet är något som intimt förknippas med en viss form av aktivitet.

Det är viktigt att notera att de framgångsrika eleverna har större förmåga att tyda och tolka information. De kan göra överväganden och därefter välja en lämplig lösningsstrategi. De har också lättare att finna en generaliserbar lösning. Elever med svagare matematisk förmåga har svårt att hantera information. De kan då heller inte översätta innehållet till det matematiska symbolspråket. De strävar efter att så fort som möjligt hitta en lösningsmodell som de tror ska passa.

Det är skrämmande att konstatera att så många elever tidigt ger upp. "Det är ingen idé, det blir fel i alla fall". De vågar inte lita på sitt tänkande. "Förklara inte så mycket, tala bara om hur jag ska göra" är en vanlig kommentar.

Många av de vuxna personer jag arbetat med har visat prov på den hårda programmering som skolan utövat på dem. De startar med att fråga, "Hur ska jag ställa upp?" eller "Hur ska jag göra?" Det är den formella matematiken som helt dominerar. Innehållet i uppgiften kommer i andra hand.

Både förmåga och färdighet är lyckligtvis påverkbara faktorer, där skolans undervisning är av avgörande betydelse. Den bör bidra till att utveckla elevernas matematiska tänkande. Men det viktiga är då att vi möter eleven där han/hon befinner sig och inte där vi önskar att han/hon skulle vara. Man måste noga kartlägga elevens totala situation, både vad det gäller förutsättningar (förmåga) och prestation (färdighet). Utifrån detta måste sedan undervisningen utformas.

## Samtal och lärande

Matematikundervisningen har hittills i stor utsträckning dominerats dels av lärarens genomgångar, dels av elevernas individuella "tysta" räkning. Under senare år har det skett en förskjutning mot ett alltmer individualiserat arbete med betoning av de enskilda elevernas egenansvar för sin inläring. Med ett sådant arbetssätt är de svaga eleverna de stora förlorarna. Endast de starka och framgångsrika eleverna har förmåga att planera och strukturera sin inläring. De klarar sig för övrigt "trots" skolans undervisning, medan resultaten för de övriga är totalt beroende av hur undervisningen utformas.

Eftersom språket är av så avgörande betydelse för den matematiska begreppsbildningen är det nödvändigt att ge stort utrymme åt muntlig matematik, där elever får tillfälle att formulera sina tankar. Först då provas hållfastheten i tänkandet.

Barn är egentligen ofta ivriga att berätta. Det är viktigt att vi som lärare tar vara på deras spontana berättande, eftersom detta ger oss kunskap om barnets egen verklighet och om deras språkliga uttrycksförmåga. Under berättarstunder får barnen också öva sig i att lyssna och vänta på sin tur.

De språksvaga eleverna behöver emellertid mycket stöd och hjälp eftersom de ofta har ett begränsat ordförråd, inte minst vad det gäller för matematiken viktiga ord och uttryck (Malmer, 2002b).

Det är speciellt vid lösning av textuppgifter som svårigheterna för de språksvaga eleverna visar sig. Texten i sådana uppgifter är oftast koncentrerad och innehåller ord som inte tillhör elevernas vardagsspråk, vilket bidrar till att dessa elever har svårt att tolka innehållet och därmed inte heller kan finna en lösningsstrategi.

Ett medvetet och systematiskt arbete med att utöka elevernas ordförråd i förening med samtal och diskussioner bör vara självklara och väsentliga inslag i undervisningen. Här bör man även ge utrymme för organiserat samtal i grupp, till att

börja med pararbete, eftersom detta även utvecklar det sociala samspelet. Eleverna kan också på detta sätt bli en värdefull resurs för varandra. Olika förslag till lösningar kan för övrigt medverka till att skapa ett ökat intresse och engagemang.

## Logik i matematik

Ett väsentligt mål för matematikundervisningen är som tidigare angivits att lära eleverna att förstå och använda logiska resonemang. I detta arbete har jag sedan lång tid tillbaka bl a arbetat med färgstavar, ett laborativt relationsmaterial, som skapats av belgaren George Cuisenaire (1891–1976).

Piaget använde uttrycket "handen är hjärnans förlängda redskap", men handen kan också ha behov av redskap. Ibland är det en penna, och vi uppmanar då eleverna att rita och på så sätt försöka att visualisera den information de arbetar med.

Men det är inte alltid så lätt att från början veta hur man ska planera. Arbetar man i stället med ett rörligt material går det lättare att gruppera om, byta ut eller komplettera. Det viktiga är att eleverna får en möjlighet att angripa problemet, att inte fastna och bli blockerade.

Som ett resultat av ett mångårigt arbete med färgstavarna har jag ställt samman ett datorprogram med titeln Logik i matematik. Det innehåller närmare tusentalet övningar, alltifrån enkla jämförelser, där likhet och olikhet övas, till helhetens relation till delarna, tal i bråkform och procentform, huvudräkning, problemlösning med stigande svårighetsgrad och förmåga att tolka instruktioner.

För flertalet elever betyder visualiseringen ett värdefullt stöd för förståelsen. De behöver endast koncentrera sig på innehållet och tolkningen av detta utan några krav på en formell symbolredovisning. De kan också angripa problemet genom att visualisera innehållet steg för steg. Rörligheten medger också att de kan pröva och utforska.

Programmet innehåller många omväxlande uppgifter, alltifrån enkla problem till mycket komplexa och logiskt krävande uppgifter. Det är faktiskt en del elever som kan uppleva matematiken tråkig på grund av att de inte får tillfälle att brottas med utmaningar som gör att de tvingas tänja på sin intellektuella kapacitet.

## Krav på logik

Våra styrdokument ger anvisningar om vilka mål vi ska ha för undervisningen. Samtidigt ger olika prov signaler om viktiga kunskapsmoment. Speciellt intressant att ta del av är de uppgifter som ges i högskoleprovet under rubriken NOG (Numerisk räkning Och Geometri). Följande exempel är från provet i oktober 2002.

Det ordinarie priset på en skjorta, som realiserades, var 600 kr. Inför slutrean sänktes priset till halva ursprungliga reapriset. Vad var det ursprungliga reapriset på skjortan?

- (1) Priset vid slutrean var 390 kr lägre än det ordinarie priset.
- (2) Det ursprungliga reapriset var 100 procent högre än priset vid slutrean.

Tillräcklig information för lösningen erhålles

- A i (1) men ej i (2)
- B i (2) men ej i (1)
- C i (1) tillsammans med (2)
- D i (1) och (2) var för sig
- E ej genom de båda påståendena

Jag överlämnar åt läsaren att fundera på vilket av alternativen A–E som ger tillräcklig information och därmed är det rätta. Och märk väl! Det är inte svaret man är ute efter, utan det gäller att avgöra sambandet mellan informationen och dess betydelse för problemets lösning.

Men jag tror att en och annan känner en viss frustration vid tanken att under 50 minuter ställas inför 22 uppgifter med liknande innehåll. Uppgifter av den här typen är det nog inte så många som övat under matematiklektionerna.

Att vara lärare i dagens skola är troligen svårare än någonsin. Barn växer upp i en stressad tillvaro med så många intryck, flertalet obearbetade, att många har koncentrationssvårigheter. Matti Bergström, den finske hjärnforskaren, beskriver i sin bok *Hjärnans resurser* (1990, s 52), "att hjärnan har vissa fasta *toleransvärden* gentemot den information som förs in i den. Om kunskapstrycket mot sinnesorganen överstiger (enligt Millers laboratorieförsök 1964) 10 bit/s så sjunker hjärnans effektivitet att lösa problemet. Detsamma gäller om trycket sjunker under ett visst värde." Såväl överstimulans som monotoni gör att hjärnan förlorar delar av sin förmåga att klara av viktiga situationer. Detta tycker jag är väldigt viktigt att fundera över.

Avslutningsvis vill jag betona vikten av att lärare bör vara såväl ledare som handledare. Detta kräver emellertid att lärare får en gedigen utbildning i såväl teori som praktik med åtföljande kontinuerlig kompetensutveckling. Dessutom, och det är minst viktiga, måste samhället återge läraryrket status så att det blir attraktivt både att bli och förbli lärare.

## LITTERATUR

- Bergström, M. (1990). *Hjärnans resurser*. Jönköping : Seminarium Förlag AB.
- Krutetskii, V.A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: Chicago Press.
- Malmer, G. (2001). *Logik i matematik*. Datorprogram. Malmö: Elevdata.
- Malmer, G. (2002a): *Bra matematik för alla*. Lund: Studentlitteratur.
- Malmer, G. (2002b): Läs och lösa problem. *Att Undervisa*, nr 1, 17-19.
- Wigforss, F. (1925): *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm : Bergvalls.
- Vygotskij, L. (1980): *Psykologi och dialektik*. Stockholm: Norstedt & Söner.