

Att se i stället för att räkna

DAGMAR NEUMAN

En liten flicka i åk 2 fick besvara frågorna: "Vad är roligast och vad är tråkigast i matematik?" På den första frågan svarade hon "Att det finns plus" och på den andra delen "Att det finns minus". Detta berättar Leif Hellström (1985) i sin avhandling.

Dagmar Neuman tar upp hur man löser aritmetiska uppgifter genom att analysera deras struktur — "att se i stället för att räkna". Då spelar räknesätten inte så stor roll och sorgen över minus kan elimineras.

Att "se det så" . . .

Freudenthal (1978) påpekar vid upprepade tillfällen att barn — på frågan om hur de löst problem — svarar: "Ik zie het zo" ("Jag ser det så"). Att kunna "se det så" är en gåva, säger han, som emellertid tycks avta — eller helt gå förlorad — någon gång i 11–12-årsåldern.

Wertheimer (Luchins & Luchins, 1970) visar hur vuxna människor och även äldre barn ofta har svårt att "se det så" när han presenterar problem av typen:

$$\frac{889 + 887}{2}$$

$$\frac{(888 + 1) + (888 - 1)}{2}$$

$$\frac{170 + 175 + 180}{3}$$

$$(4 \cdot 37) / (12/3)$$

Många vuxna studenter som fått dessa uppgifter löste dem genom att addera — respektive multiplicera — och dividera. Då Wertheimer påpekade att det var möjligt att lösa problemen genom att analysera deras struktur, ansåg en del studenter att detta skulle ta längre tid än att räkna ut dem. Wertheimer förklarade att frågan inte var hur snabbt de kunde lösas, utan om man kunde lösa dem vettigt (s 5).

Om man kan lösa problem genom att se strukturer i dem spelar det ingen roll om de symboler som finns i uttrycket pekar på att de skall lösas med addition, subtraktion, multiplikation eller division. Att "se det så" i stället för att räkna skulle alltså kunna eliminera sorgen över att "det finns minus".

"Att se" i stället för att räkna över 10-gränsen

Förutsatt att denna typ av struktur finns i de talkombinationer vi i läroplanen kallar "additions- och subtraktionstabellerna" skulle vi inte behöva syssla med tabellträning och inte heller behöva skilja mellan addition och subtraktion. Vi skulle istället ägna vår tid åt att lära barnen "se det så", lösa problemen på ett vettigt sätt utifrån uppgiftens struktur.

Att sådana strukturer finns i problem där 10-gränsen passeras vet vi. De kan nämligen struktureras med hjälp av ett "del-/helhetsschema" (Resnick, 1983), där den ena delen alltid är 10 eller ett tal multiplicerat med 10 (fig 4 och 5). Man kan även se andra strukturer — t ex strukturer utgående från "dubblorna" i sådana problem. I fig 2–5 har jag försökt visa olika — men vettiga — sätt elever använt och beskrivit för att lösa uppgifterna $12 - 7 = \underline{\quad}$ och $13 - 7 = \underline{\quad}$

$$12 - 7$$

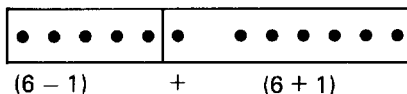


Fig 2:

$12 - 7$ är 5 därför att $6 + 6$ är 12 . . . tar bort 1 . . .

$$13 - 7$$

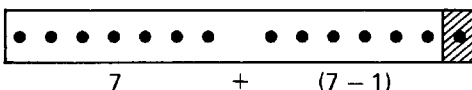


Fig 3:

$13 - 7$ är 6, därför att $7 + 7$ är 14 . . . 1 mindre . . . 6 . . .

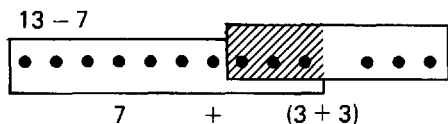


Fig 4:

13 - 7 är 6 . . . tar bort 7 från tian . . . 3 . . . så 3 . . . 6 kvar.

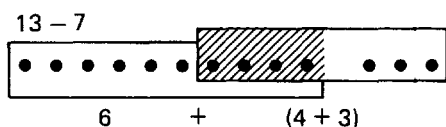


Fig 5:

Tar bort 3 från sjuan . . . och så 4 till . . . blir 6.

Man "ser det så" — ögonblickligt och självklart. Det kan emellertid vara svårt att med ord på ett begripligt vis beskriva det man sett.

Generella och icke generella strukturer

Del-/helhetsschemat, där 10 görs till en del (fig 4 och 5) är en generellt tillämpbar struktur. Den går utmärkt att använda även inom högre talområden, t ex i uppgifterna $42 - 7 = _$; $42 - 35 = _$ respektive $43 - 7$; $43 - 36 = _$ (fig 6).

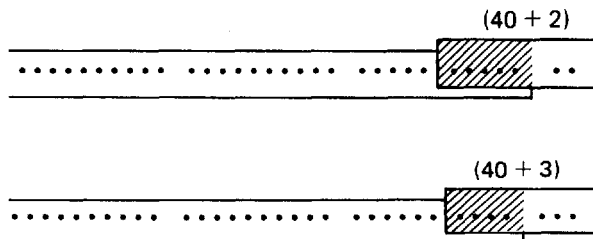


Fig. 6

Däremot är det svårt att använda de strukturer som knyter till "dubblorna" för sådana uppgifter. Att t ex se $42 - 7$ som 35, därför att $6 + 6 = 12$ ligger inte nära till hands. Strukturer knutna till "dubblorna" går inte heller att "se" i samtliga kombinationer inom talområdet 1—20.

Att "se" i stället för att räkna inom talområdet 1—10?

Strukturen med "del-/helhetsschemat" där ena delen är 10 kräver emellertid — till skillnad från strukturer knutna till "dubblorna" — att man blixtnabbt kan "se" i stället för att räkna även inom talområdet 1—10. Är detta möjligt?

I en tidigare artikel (Nämaren 4/12) har jag beskrivit hur jag hösten 1982 och 1983 intervjuade sammanlagt 105 nybörjare. En avsikt med dessa intervjuer var att studera hur barn som ännu inte undervisats formellt löste uppgifter inom talområdet 1—10. Jag ställde mig frågan:

Kan barn som ännu ej undervisats *se det så* och därför slippa räkna? Kan den tendens Freudenthal påvisat — att barn efter hand slutar *se det så* — sammanhånga med att de i skolan *lär sig* att räkna i stället för att *se*?

Att "se dubblor" i talen 1—10

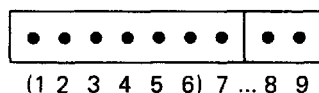
Då jag börjat studera utskrifterna av intervjuerna såg jag ganska snart att många av nybörjarna använde sig av härledning från "dubblorna" även inom talområdet 1—10. Av de 82 eleverna i de fyra klasser, där samtliga elever intervjuats, använde drygt 40 % av eleverna vid ett eller flera tillfällen strukturen i fig 3 (t ex $3 + 4 = 7$, därför att $3 + 3 = 6$), nästan 30 % strukturen i fig 2 (t ex $3 + 5 = 8$, därför att $4 + 4 = 8$) och drygt 20 % kunde växla mellan dessa två sätt att strukturera tal inom talområdet 1—10.

Att "se största delen först" i talen 1—10

Det visade sig att nybörjarna också skapat en idé med vilken de kunde "se" i stället för att räkna problem av typen $2 + _ = 9$: ("Om du har 2 kr och vill köpa en tidning som kostar 9 kr, hur många kr fattas?"), ett problem där det är svårt att utgå från "dubblorna". I fig 6 har jag försökt ge en schematisk bild av hur de barn som skapat idén "störst — först" såg kombinationen med 7 och 2 och 9. Idén gick ut på att om ett tal skulle delas upp i en stor och en liten del — eller om ett tal och ett mindre tal skulle adderas — måste den största delen alltid placeras först inom helhetens ram. Placeras den sist blir nämligen första ordet inte ett och man kan därför inte — utan att på något sätt räkna de uppräknade orden — avgöra hur många de är. Kombinationen med 7 och 2 och 9 brukar i våra läromedel presenteras med följande uttryck:

Fig. 7

$7 + 2 = _$, $2 + 7 = _$, $7 + _ = 9$, $2 + _ = 9$, $_ + 7 = 9$, $_ + 2 = 9$,



$9 - 2 = _$, $9 - 7 = _$, $9 - _ = 7$, $9 - _ = 2$, $_ - 2 = 7$, $_ - 7 = 2$.

Oavsett vilket av dessa uttryck som låg till grund för det i en verklig händelse inbäddade problem jag bjudit barnen, löste de uppgiften på ett av två olika sätt: de räknade antingen upp alla orden eller enbart orden i den minsta delen.

Att "räkna alla"

Det mest elementära sättet var att räkna upp *alla* orden framåt. Jag uppfattade det som om barnen räknade upp "namnen" på t ex de kronor uppgiften berättade om. Barnen tycktes föreställa sig en ny krona fogad till mängden för varje "namn" som uttalades då de sa:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . . 8, 9

Eftersom sista namnet berättar om antalet, om alla enheter från och med den som kallas "ett" finns med i mängden, behövde de inga fingrar för att veta hur många det var i den första delen. Det sista ordet där var "sju" och då måste den innehålla sju enheter. I den andra delen — där första ordet *inte* var "ett", och där sista ordet alltså *inte* berättade om antalet — var enheterna inte fler än att barnen kunde *höra* hur många de var: *åtta* och *nio* var *två* enheter. Svaret blev 2, 7 eller 9 beroende på om uppgiften var $9 - 7 = __$, $9 - 2 = __$ eller $2 + 7 = __$.

Att "räkna minsta"

Ännu enklare blev beräkningarna, när barnen slutat räkna upp alla ord — "namn" — och bara räknade upp "namnen" på enheterna i den minsta delen antingen framåt eller bakåt:

7 . . . 8, 9 eller 9, 8 . . . 7.

Vare sig de räknade upp dem framåt eller bakåt *hörde* de att det var två enheter. På samma sätt hör vi att det rör sig om två pojkar, vare sig man berättar om dem som Anders och Kalle eller som Kalle och Anders.

Om barnen räknade upp orden framåt eller bakåt berodde på uppgiftens natur. I uppgifter som kan beskrivas med uttrycket $9 - 2 = __$ eller $2 + __ = 9$ *måste* barnen räkna bakåt, eftersom det inte fanns något ord att börja med vid framåträkning. Den största delen, som man skulle kunna utgå ifrån, var ju just den som efterfrågades i uppgifter av denna typ. I uppgifter av typen $9 - 7 = __$ eller $7 + __ = 9$ räknade de *antingen* framåt eller bakåt och i uppgifter av typen $7 + 2 = __$ eller $2 + 7 = __$ gick det *enbart* att räkna framåt.

Fingerbilder — romerska siffror

Ett annat sätt på vilket nybörjarna såg lösningen på de problem jag bjudit byggde på strukturer som finns inbyggda i våra egna kroppar. Jag såg att de intervjuade barnen ibland direkt kunde lägga upp ett antal fingrar och frågade hur de

utan att räkna kunde veta att det t ex var precis sju fingrar de lagt upp. De svarade då:

För det är två mer än fem

eller i något fall

För det är tre mindre än tio

Barnens "fingerbilder" bestod av "5 + något", "5 - något" eller "10 - något"-strukturer. De hade en blandad fem- eller tiobas. Strukturen i barnens fingerbilder liknade strukturen i de romerska siffrorna så som dessa uppträdde i sitt tidigaste skede, då fyra skrevs IIII och nio skrevs VIIII. Hela handen uttrycktes då med V och båda händerna med ett rättvänt och ett upp- och nedvänt V-tecken, dvs X (jfr Wigforss, 1950). Till sammans med barnens lärare prövade jag att hjälpa de nybörjare jag följde i två år att "översätta" sina spontant utvecklade fingerbilder till de ursprungliga romerska siffrorna. Det vänstra strecket i tecknet V motsvarade de fyra fingrarna och det högra tummen.

Om barnen t ex skrev den romerska siffran nedanför 9 i uppgifterna $2 + __ = 9$ eller $9 - 2 = __$, och ringade in den kända delen, uppkom en syntes av idén "störst — först" och användandet av fingerbilder uppdelade i två delar. Den största delen måste, därför att symbolen V endast kunde delas upp i 4 + 1, komma först om man översatte fingerbilderna till romerska siffror (fig 8). De romerska siffrornas struktur — liksom strukturen i fig 7 — kan kombineras med alla de 12 uttryck en kombination kan beskrivas med. Mönstret i de romerska siffrorna med sin blandade fem- och tiobas är dessutom generellt tillämpligt för i princip alla kombinationer inom talområdet 1—10, precis som del- och helhetsmönstret med tiobas (fig 4 och 5) är generellt tillämpligt inom högre talområden.

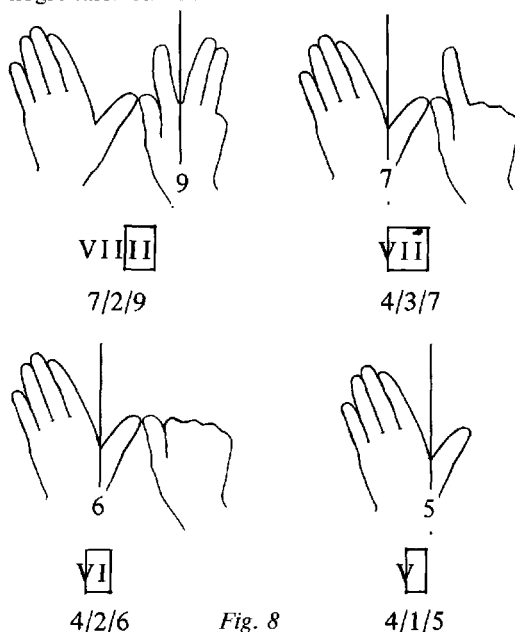


Fig. 8

Strukturer för alla kombinationer inom talområdet 1—10 — utom komb. med 3,2,5 och 3,3,6 — gick att se i denna typ av romerska siffror. Även i kombinationerna 4,3,7, 4,2,6 och 4,1,5 gick de att använda, eftersom tummen kunde "avskiljas" från det streck som betydde 4 (Fig 8).

Svårare att använda fingerbilder än romerska siffror

De romerska siffrorna har den fördelen framför barnens naturligt använda fingerbilder att den största delen måste komma först. Om barnen använder fingerbilderna kan de placera den minsta delen först. Det är då inte möjligt för dem att finna en bekant struktur i den okända större delen. Då t ex uppgiften $2 + _ = 9$ struktureras så som i fig 9, uppkommer strukturen $3 + 4$ i stället för den för barnen välkända: "hel hand plus två" (VII).

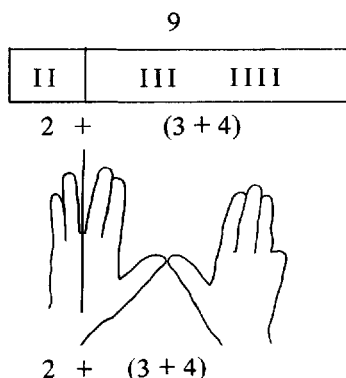


Fig. 9

Roligast! Att "det finns minus"

Fingerbilderna användes som tankestrukturer redan hos en del av de vid skolstarten intervjuade nybörjarna. De löste många problem omedelbart. Niklas svarar t ex omedelbart "Nio" på min fråga: "Hur många pennor har du om du från början har 4 i din bänk och sedan får 5 till av mig?" Han säger att han "tänkt med sina händer" och när jag frågar: "Hur?" håller han upp sina två händer med den ena handens tumme invikt. Det är alltså här inte fråga om att räkna upp ett ord i taget och lägga upp ett finger för varje ord, som man gör när man "räknar på fingrarna". Niklas använder inga räkneord. Han "ser" fingerbilderna för talet nio som en helhet uppdelad i två delar: fem och fyra — dock utan att över huvud taget kasta en blick på sina fingrar. På samma sätt "tänker han ut med sina händer" att om han har två kronor och vill köpa en tidning för nio kronor saknas 7 kronor. Han visar *efteråt* hur han tänkt genom att återigen

hålla upp sina två händer med ena handens tumme invikt och säger: "Dom två går över hit", varvid han flyttar över högerhandens pekfinger och långfinger till vänster hand. Men han kan inte med ord förklara hur han kommit underfund med svaret. Han måste visa med sina händer att "han sett det så" (jfr Neuman 1984 och 1986).

Operationerna med de romerska siffrorna övergick efter hand till att bli *inre* operationer — tankehandlingar — även hos de nybörjare vi undervisade. Dessa inre operationer med talen 1—10 kunde sedan användas för att strukturera större tal så som visas i fig 2—6. Fältet låg därefter fritt för vidare utveckling av räknefärdigheter — räknefärdigheter som dock inte krävde någon räkning.

Utvecklar man sin förmåga att "se" i stället för att lära sig att räkna eller att plugga tabeller är det talet och dess delar man intresserar sig för. Om delarna sätts samman eller tas isär är av underordnad betydelse. Upplevelsen av detta samband mellan addition och subtraktion ledde till att våra elever ansåg att minus var det "roligaste som fanns" — även om plus var nästan lika roligt.

Man når dock — som jag starkt betonat i min tidigare artikel i *Nämaren* 4/12 (s 35) — oavsett inlärningsmetod ingen framgång i sina försök att hjälpa barn utveckla aritmetiska färdigheter, om man inte först hjälpt dem förstå uppgifternas innebörd och vad räkneorden betyder.

Referenser

- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a science of mathematical education*. Dordrecht: Reidel.
- Hellström, L. (1985). *Undervisningsmetodisk förändring i matematik — villkor och möjligheter*. Lund. Studia psychologica et paedagogica series altetra LXXIX.
- Neuman, D. (1984). Nybörjarlogik. *Krut*, nr 34 2/84, 13—18.
- Neuman, D. (1985/86). Barnlogik och vuxenlogik. *Nämaren*, 4, 35—37.
- Neuman, D. (1986). Forskning om tidig räkning och matematiksvårigheter. *Fackdidaktisk forskning, volym 3*. F Marton (Ed) Lund, Studentlitteratur.
- Luchins, S. & Luchins, E.H. (1970). *Wertheimer's seminars revisited problem solving and thinking, volume II*. New York, Faculty-Student Association.
- Resnick L.B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.
- Wigforss, F. (1950). *Den grundläggande matematikundervisningen*. Stockholm. M. Bergvalls förlag.