

Ett värdigt 400-årsjubileum

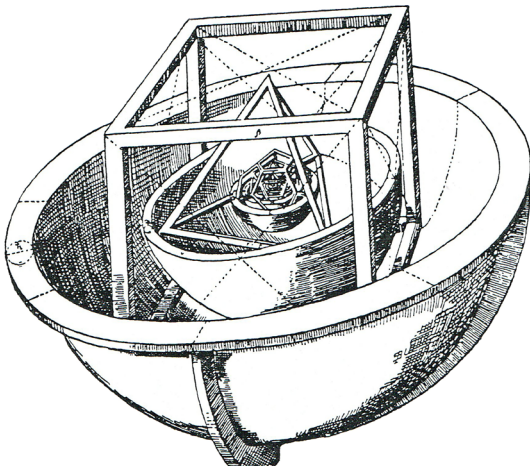
Den 8 mars 1618 dyker en idé upp i Johannes Keplers huvud men han förkastar den som falsk. Drygt två månader senare kommer idén oförändrad tillbaka och det visar sig vara en upptäckt – men vilken?

I ett brev till den mångsidige forskaren Robert Hooke år 1675 eller 1676 skrev Isaac Newton: *Om jag möjligen sett lite längre än andra, så är det därför att jag stått på skuldrorna till jättar.* Vilka jättar kan han ha avsett? I första hand bör det ha varit Galileo Galilei och Johannes Kepler. Galilei som är känd som "fysikens fader" var hemmastadd även i matematik och astronomi. Han fann att kastkurvan är en parabel och byggde den sedermera så kallade "teaterkikaren" eller "Galileis kikare". Även Kepler byggde en kikare, "Keplerkikaren" eller "den astronomiska tuben", men framför allt var Kepler en skicklig och uthållig matematiker och det är om honom denna artikel handlar.

Johannes Kepler och planetbanorna

Kepler föddes 1571 i den tyska staden Weil der Stadt. Efter en tid som elev till astronomen Michael Mästlin i Tübingen blev han 1594 anställd som astronom i Graz, Österrike. Kepler hade intresserat sig för planetbanorna och fick 1595 en ingivelse: *Jorden är måttet för planetbanorna.* Deras radier skulle kunna erhållas med hjälp av de platoniska kropparna på följande vis:

Omskriv en dodekaeder kring jordklotet, därefter en tetraeder kring dodekaedern och därpå en kub kring denna. Det ger banradierna för Mars, Jupiter och Saturnus. Inskriv i stället en ikosaeder i jordklotet och därefter en oktaeder i ikosaedern. Detta ger banradierna för Venus respektive Merkurius. Liksom Pythagoras och Galilei var Kepler övertygad om att allt är ordnat efter mått och tal. Han såg måtten för planetbanorna som ett "Mysterium Cosmographicum".



Arv efter Tycho Brahe

År 1601 efterträdde Kepler den då avlidne Tycho Brahe som kejsarens hovastronom i Prag. Brahe hade från sina två observatorier på ön Ven i Öresund, Uraniborg och Stjärneborg, gjort ett stort antal ytterst noggranna observationer på himlakroppar och därvid noterat deras positioner. Kepler "ärvde" det enorma siffermaterialet från Brahe och var imponerad över dennes flit och noggrannhet. Enligt Keplers mening saknade Brahe en "arkitekt" som kunde strukturera datamaterialet.

Brahe hade tänkt att planeterna rör sig runt solen men att denna tillsammans med planeterna rör sig kring jorden. Det var en kompromiss mellan den gamla geocentriska världsbilden och Kopernikus nya, heliocentriska, system med solen i centrum.

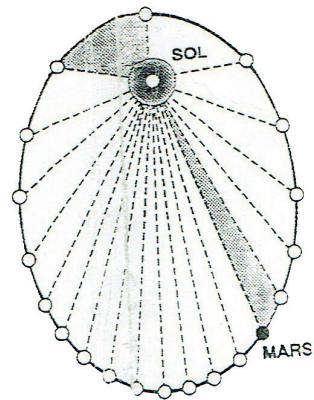
Keplers första och andra lag

Kepler påbörjade egna undersökningar av jordbanan. Med hjälp av Brahes oppositionsmätningar kom han fram till ett resultat som hade en felmarginal på två bågminuter. Det var han inte nöjd med och gjorde en ny kalkyl. Den visade en felmarginal på hela åtta bågminuter. Det var detta misslyckande som ledde Kepler vidare. Han försatte sig i tanken till Mars. Med denna planet som referenspunkt nådde han resultat rörande avstånden mellan jorden och solen. Efter mödosamma beräkningar fann Kepler 1602 den lag som senare kom att kallas Keplers andra lag eller ytsatsen: *Radius vektor från solen till en planet sveper på ett givet tidsintervall över en och samma yta.*

Med denna sats som språngbräda arbetade Kepler vidare och kom med hjälp av data rörande avstånden från solen till Mars och en djärv generalisering 1605 fram till den så kallade Keplers första sats: *Planeterna rör sig i ellipsbanor med solen i ellipsens ena brännpunkt.* Denna sats publicerades i boken *Den nya astronomin* 1609, den första moderna boken om astronomi.

Kepler yttrade: "Det är mitt mål att visa att den himmelska maskinen inte är en sorts gudomlig varelse utan liksom ett urverk så tillvida att nästan alla de olika rörelserna ombesörjs av en enda, helt enkelt magnetisk (läs: attraherande) kraft, som i ett urverk, vars alla rörelser betingas av ett enkelt lod. Närmare bestämt visar jag också hur denna fysikaliska föreställning kan framställas aritmetiskt och geometriskt."

Under ett uppehåll med Marsstudierna skrev Kepler en bok om optik, *Den optiska delen av astronomin*. I en undersökning rörande kägelsnitten (cirkel, ellips, parabel och hyperbel) kom han nära ett begrepp som introducerades inom projektiv geometri ett par århundraden senare, nämligen de oändligt-avlägsna punkterna. I platonisk anda ansåg Kepler att en tecknad cirkel endast är en sinnlig bild för begreppet cirkel. Han avvisade tanken att vi skulle komma till begreppet cirkel med hjälp av de cirkelfigurer som passaren ritar.



Allt är ordnat efter mått och tal

Den 10 oktober 1604 framträdde en ny stark stjärna på natthimlen. En vecka senare var det åter klart väder och Kepler kunde se en gnistrande stjärna som i lyskraft tävlade med Jupiter. Vid samma tid inträffade en så kallad stor konjunktion mellan Jupiter och Saturnus, en tilldragelse som inträffar med cirka 20 års mellanrum. Allt detta föranledde Kepler att som hovastronom skriva om de kosmiska händelserna. Han avvisade därvid en astrologisk tolkning, rätt vanlig dåför tiden.

Vintern 1609/10 upptäckte Galilei med sin kikare fyra Jupitermånar. Hans upptäckt bekräftades av Kepler. Efter flera år av bekymmer med bla trosstrider, 30-åriga kriget som började 1618 och en häxprocess mot Keplers mor (varvid Kepler räddade henne från att bli dömd) kunde hans astronomiforskning återupptas. Kepler blev alltmer övertygad om att planetsystemet är präglad av harmoni. Allt är ordnat efter mått och tal och inte minst i tonernas värld råder

harmonin där oktavsteget uppåt innebär en fördubbling av frekvensen, proportionen är 2:1. Vi har en förmåga att dunkelt uppfatta somliga proportioner som harmoniska. De finns "under ett moln av ickevetande", skrev Kepler. Det påminner om Leibniz som i ett brev 1712 skrev att själen utför en omedveten aritmetik när vi hör välljudande klanger. Kepler kände till att de fem första heltalen 1, 2, 3, 4 och 5 bestämmer harmoniska intervaller i den diatoniska skalan. Utöver oktavens proportion 2:1 har vi följande frekvensproportioner: kvint 3:2, kvart 4:3, stor ters 5:4, liten ters 6:5, stor sext 5:3 och liten sext 8:5. Stor ters och liten ters bestämmer dur respektive moll.

Förenklande logaritmering

År 1614 introducerade engelsmannen Napier sina "mirakulösa" logaritmer. De kom till Keplers kännedom två år senare och han förstod vilken förenkling logaritmering medför vid de räknesätt som är högre än addition och subtraktion, inte minst vid multiplikation och division. Vintern 1621/22 skrev Kepler efter självständigt arbete, dvs oberoende av Napiers publicering, en bok om logaritmer som utgavs 1624. I moderna termer kan Keplers logaritm definieras på följande sätt:

$$\log x = 10^5 \ln \frac{10^5}{x}$$

Den 8 mars 1618 dyker en idé upp i Keplers huvud men han förkastar den som falsk. En tid senare, den 15 maj 1618 kommer idén oförändrad tillbaka – och det är då som det i rubriken angivna 400-årsjubileet har sin upprinnelse. "Jag har rövat egypternas gyllene kärl för att inrätta en helig hydda åt min gud långt borta från Egyptens gränser" – så lyder Keplers kryptiska formulering beträffande den nya upptäckten. Vad var det han hade upptäckt? Svaret är att han hade upptäckt det som senare kom att kallas Keplers tredje planetlag: *Kvadraterna på omloppstiderna förhåller sig som kuberna på deras medelavstånd till solen.*

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$$

Till sist några ord om Keplers intresse för volymen hos vintunnor. Han approximerade tunnorna med ett antal cylindrar med liten höjd och fick som resultat att höjden h vid maximal volym borde vara

$$h = \frac{2d}{\sqrt{3}}(*)$$

där d är en given diameter. Keplers metod kan ses som en primitiv föregångare till approximering av Riemann-integralen med undersumma respektive översumma. Kepler konstaterade förnöjd att (*) stämde bra på vintunnorna. För övrigt tog sig Kepler an volymen hos ett stort antal andra kroppar, tex den badringsliknande torusen. Till sist är det värt att nämna att Kepler kunde konstruera de 13 halvreguljära (arkimediska) kropparna.

LITTERATUR

- Caspar, M. (1948). *Kepler*. Stuttgart: Kohlhammer Verlag.
 Hemleben, J. (1971). *Kepler*. Rowohlt Taschenbuch Verlag.
 Ulin, B. (2017). *Till minne av en krigsfånge*. Nämnaren 2017:3.