UPPSLAGET

Hur rund är en kvadrat?

Olika figurer kan sägas vara olika runda. Kvadraten är bara 78,5% rund, visar det sig. Ingen triangel är mer rund än 60,5 och en femuddig stjärna bara 22,8%. En halvcirkel har inte rundhet 50% som man kanske kunde tro, utan 74,7%, medan en åtta bestående av två cirklar har rundhet 50%. Hur kommer det sig, tro?

En cirkel har många speciella egenskaper. En sådan är att den stänger in så mycket area som möjligt, för en fast längd på begränsningskurvan. Ett snöre som är knutet till en ögla innehåller så mycket area som möjligt om den bildar en cirkel. Hur stor area man får med fix omkrets, kan vi säga är en figurs rundhet. Här är en lista över några välkända figurers rundhet (fjärdeplatsen är delad).

	Namn	Figur	Rundhet, %
1	Cirkel		100
2	Regelbunden sexhörning		90,1
3	Regelbunden femhörning		86,5
4	Kvadrat		78,5
4	Cirkelsektor, 2 rad.		78,5
6	Kvartscirkel (π/2 rad.)		77,4
7	Halvcirkel (π rad.)		74,7
8	Liksidig triangel		60,5
9	Halv kvadrat		53,9
10	1,4-rektangel		50,2
11	Dubbelcirkel		50
12	Sexuddig stjärna		45,3
13	Trippelcirkel		33,3
14	Femuddig stjärna		22,8

Cirkelns är störst, men vad är andra kurvors rundhet? Alla (normala) figurer har ju en omkrets O och en area A. Ett sätt att mäta en figurs rundhet är att skala om hela figuren så att den får omkrets 1.

Låt oss skala om med skalfaktor S. Om S < 1 förminskar vi, om S > 1 förstorar vi. Efter en omskalning får vi area S^2A och omkrets SO. Det betyder att kvoten A/O^2 är oberoende av skalfaktorn S, för S försvinner vid insättning av S^2A och SO.

Låt oss då definiera en figurs rundhet R med formeln

$$R = \frac{4\pi A}{O^2}$$

Med faktorn 4π har alla figurer rundhet mellan 0 och 1, och bara cirkeln har 100 % rundhet (testa med att sätta in $O = 2\pi r$ och $A = \pi r^2$). Nu kan vi beräkna rundheten för vilken figur som helst. Det är inte konstigare än att räkna ut omkrets och area och sätta in i vår formel.

Vi kommer nu att undersöka några välkända figurers rundhet. Sen är det upp till dig, kära läsare, att göra egna undersökningar.

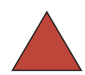
Kvadraten

Hur rund är en kvadrat? Med sida 1 har vi area 1 och omkrets 4 får vi rundheten

$$R(kvadrat) = \frac{4\pi \cdot 1}{4^2} = \frac{\pi}{4} \approx 78,5\%$$

En kvadrat är alltså 78,5% rund.

Trianglar



En liksidig triangel med sida 1 har omkrets 3. Den har bas 1 och höjd $\sqrt{3}/2$, så arean är $\sqrt{3}/4$. Här får vi betydligt lägre rundhet:

$$R(liksidig\ triangel) = \frac{4\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}{3^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 60,5$$

Vilken rundhet har andra trianglar? Går det att bevisa vilken triangel som är mest rund?

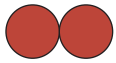
Rektanglar

En rektangel med längd a och bredd 1 har omkretsen $2a + 2$ och arean a. Det ger rundhet

$$R(rektangel) = \frac{4\pi \cdot a}{(2a+2)^2} = \frac{\pi a}{(a+1)^2}$$

Genom att derivera denna funktion och sätta lika med noll kan man se att den är maximal när $a = 1$, alltså då vi har en kvadrat. Om a blir mycket stor eller nära 0 blir rundheten nära 0. Vid vilket a är rektangelns rundhet 50%?

Dubbel- och trippelfigurer

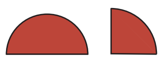


Om man placerar två kopior av en figur bredvid varandra som bara vidrör varandra i en punkt får man en dubbelfigur med area 2A och omkrets 2O. Den har rundhet

$$R(dubbel) = \frac{4\pi \cdot 2A}{(2O)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi A}{O^2}$$

så rundheten har halverats jämfört med den enkla figuren av samma slag. På samma sätt har en trippelfigur en tredjedel av rundheten för den enkla.

Cirkelsektorer



Vilken är rundast: halvcirkeln eller kvartscirkeln? Gissa först! Här har vi stor nytta av radianbegreppet. Det säger att för en cirkelbåge med radie *r* och vinkel *v* är cirkelbågens längd *rv*. Om radien är 1 så är vinkeln samma som cirkelbågens längd – mycket praktiskt! Med radie 1 har då halvcirkeln omkrets $\pi + 2$ och area $\pi/2$. Det ger rundhet

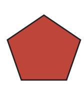
$$R(halvcirkel) = \frac{4\pi^2/2}{(\pi+2)^2} \approx 74,7\%$$

Kvartscirkeln har omkrets $\pi/2 + 2$ och area $\pi/4$, som ger rundhet

$$R(kvartscirkel) = \frac{4\pi^2/4}{(\pi/2+2)^2} \approx 77,4\%$$

så kvartscirkeln vinner med knapp marginal. Kvadraten är dock rundare än dessa båda! Den intresserade kan kanske formulera en hypotes om vilken cirkelsektor som är mest rund, och kanske också bevisa denna.

Regelbundna månghörningar



En regelbunden månghörning med *n* hörn består av *n* trianglar, med mittvinkel $360/n°$, eller $2\pi/n$ radianer. Antag att triangelns sida mot mittpunkten är 1. Då har triangeln höjden $\sin(\pi/n)$ och basen $2\cos(\pi/n)$. Triangelns area är $\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$. Månghörningens area är $n\sin(\pi/n)\cos(\pi/n)$. Månghörningens omkrets är $2n\cos(\pi/n)$. Vi får

$$R(n) = \frac{4\pi \cdot nsin(\pi/n)cos(\pi/n)}{(2ncos(\pi/n))^2} = \frac{\pi}{n} cot \frac{\pi}{n}$$

Rundheten går som väntat mot 1 då *n* blir allt större, och vi närmar oss en cirkel. Det följer av att $\sin x/x \longrightarrow 1$ då $x \longrightarrow 0$. Här är $x = \pi/n$ och $n \longrightarrow \infty$.

Stjärnor

Låt oss titta på en stjärna. En sexuddig stjärna med kant 1 kan man dela in i fyra liksidiga trianglar, en med sida 3 och tre med sidan 1. Det ger arean $3\sqrt{3}/4 + 9\sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}$. Den har omkrets 12. Rundheten är

$$R(6\ uddar) = \frac{4\pi \cdot 3\sqrt{3}}{12^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}} \approx 45,3\%$$

Kan rundheten vara noll?

Finns det kurvor med rundhet noll? Då måste antingen arean vara noll, eller omkretsen oändlig. Eller båda. Det finns gott om fraktala kurvor som begränsar en ändlig area som är större än noll, men där omkretsen är oändlig. Den berömda Kochs snöflinga är en sådan. För denna behövs lite högre dimension för att mäta kurvans storlek på ett bra sätt, det lämpliga begreppet befinner sig någonstans mellan ”längd” och ”area”. En cirkel där periferin är ”tillskrynklad” – går i zick-zack så den bara ser lite tjockare ut – kan ha mycket större omkrets än $2\pi r$. Den kan vara dubbla eller tredubbla, eller mycket mer … Om man trycker ihop den som ett dragspel mer och mer när man närmar sig en punkt kan dess längd vara oändlig. Cirkeln under förstoringsglaset har R nära 0.

Ett rundhetsbegrepp som är oberoende av kurvans mikroskopiska form kan vara

$$R' = \frac{\text{arean av största inskrivna cirkeln}}{\text{figurens area}}$$

Här finns inte omkretsen med i definitionen. Även R’ är ett tal mellan 0 och 1, och lika med 1 bara för en cirkel. Då kan man också mäta begränsningskurvans släthetsegenskap med talet S = R/R’. Är S låg är kurvan ”skrynklig”, eller ”onödigt lång”.

Vad som här kallas rundhet har en vetenskapshistoria under benämningen *den isoperimetriska olikheten*. Tredimensionella figurers rundhet kan undersökas på motsvarande sätt, men det är en annan historia.

Håkan Lennerstad