

ning mot algoritmräkning för att utveckla barns taluppfattning. Inom ARK-projektet fann man låg korrelation mellan resultaten på algoritmräkning och uppgifter på t ex förståelse för tals storleksordning eller på överslagsräkning eller på texttolkning. Uppgifter som rörde förståelse för tals storleksordning korrelerade däremot väl med de flesta andra uppgiftstyper. Även det klena resultatet på IEA-undersökningen pekar i samma riktning, dvs att svagheterna hos de svenska eleverna i aritmetik inte låg i algoritmräkning utan i begreppsförståelse, taluppfattning och problemlösning. Bristerna fanns inom det område som kallas *icke-algoritmiska basfärdigheter* — alltså färdigheter som är oberoende av det sätt på vilket beräkningar görs (med hjälp av algoritmer, huvudräkning, miniräknare eller något annat).

En förbättrad matematikundervisning för elever upp till 14—15 år måste alltså ta sikte på att

utveckla en korrekt taluppfattning hos dem och att förstärka deras begreppsförståelse framför allt beträffande de ovan nämnda begreppen.

Referenser

Björk, L-E och Brolin, H, *ARK-projektet*. Liber Utbildningsförlaget 1984.

Hart, K, *Children's understanding of mathematics 11—16*. John Murray, London 1981.

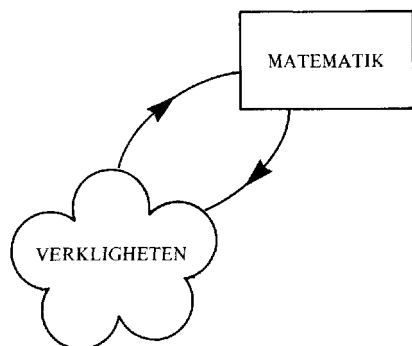
Matematik i skolan. Utbildningsdepartementet Ds 1986:5 (Se spec kap 4 om IEA-undersökningen)

Matematikämnet i förändring — eftertanke och påverkan. SÖ-fortbildningsmaterial för lärare på mellanstadiet. Liber Utbildningsförlaget 1984.

Oscarsson, E, *Diagnostiska test i matematik*. Rapport 6 1984/85. Länsskolnämnden i Kronobergs län. ("Kronobergsrapporten")

Om att förstå och att tala matematik

Följande uppsats av *Jan Wyndhamn*, lektor vid lärarutbildningen i Linköping, innehåller tankar från tidigare artiklar i *Nämnan*, och från en ny uppsats *Matematikdidaktiska reflexioner*, se referenser.

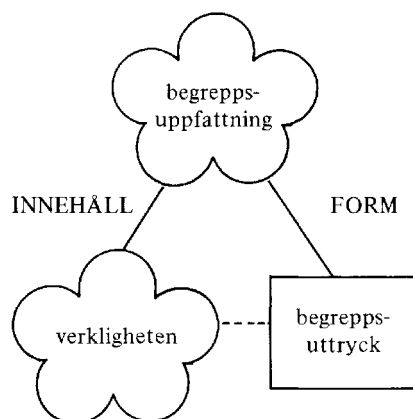


Den matematik vi undervisar om i dagens skola kan kallas *modellmatematik*. Matematiken är på sitt sätt en spegel (en modell) av verkligheten.

Modellen utgörs av matematiska begrepp, samband mellan dessa, räkneoperationer, strukturer och idéer. Begreppen fixeras genom definitioner och uttrycks med hjälp av symboler, som kan hanteras efter vissa "överenskommelser".

När vi arbetar med de matematiska begreppen

faller vi dock tillbaka på personliga föreställningar om dem. Bilden kan nyanseras till



Verklighet innebär en materiell situation där objekt, egenskaper, händelser osv kan särskiljas och identifieras.

Begreppsuttryck står för "språk" i vid betydelse:

Talspråk, skriftspråk, symbolspråk, bildspråk osv.

Begreppsuppfattning (idéer, tankar) ligger hos individen som möter uttrycken och ger dessa mening.

Triangeln ska ses som en enhet. Finns inte det samband som är streckat i figuren blir de matematiska symbolerna och tecknen utan mening. Då skiljs matematikens innehållssida från dess formsida. Matematiken placeras inte in i något *meningsbärande* sammanhang. Triangeln ger därmed en aspekt på det vi brukar kalla *förståelse*. Skrivsätt som

$$4 + 3 = 7$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$f(x) = 3x + 5$$

säger ju inget i sig om verkliga eller matematiska förhållanden. Förståelsen ligger hos den som möter och inläser vissa betydelser i symbolerna. Nu kan man vidare handskas rent formellt med symbolerna efter vissa "regler" t ex

$$\begin{array}{r} 365 \\ \cdot 9 \\ \hline 3285 \end{array} \times 5$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2} (= 1,5)$$

$$(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

$$f(x) = \sin^2 x, \quad f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

Dessa "manipulationer" (färdigheter) är egentligen aldrig mål i sig utom i skolans värld. De ingår som naturliga led i andra beräkningar eller vid problemlösning. En färdighet kan ses som en "automatiserad kunskap", men en god färdighet behöver inte självklart vila på förståelse. Ett mekaniskt beteende kan läras utantill.

Önskvärt är dock att man har ett reservförfarande, "då man inte kommer ihåg hur man gör". Ett sådant reservförfarande bygger mera på matematiska resonemang som i sin tur förutsätter god förståelse.

$$9 \times 365 = 9(300 + 60 + 5) = 2700 + 540 + 45 = 3285$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = 0,75 \div 0,50 = 75/50 = 3/2 = 1 \frac{1}{2} = 1,5$$

De matematiska begreppen utgör ryggraden i en matematisk struktur. De till begreppen hörande föreställningarna utgör stommen i vårt tänkande. Enkla primära begrepp av ren faktakarakter kan

bara glömmas eller förväxlas, t ex att "tre" skrivs 3. Men ju mer komplext ett begrepp eller ett samband mellan begrepp är, desto större spelrum får de subjektiva uppfattningarna. En del uppfattningar eller föreställningar kan gentemot något visst kriterium (t ex ett orimligt eller felaktigt resultat) betecknas som "missförstånd". Men i övrigt måste vi tala om olika *förståelsenivåer*. Man "förstår på sitt sätt". Var och en har sitt sätt att tänka, sin tankeform eller sin förklaringsmodell.

Ett synsätt eller ett tankemönster kan dock vara mer utvecklat, moget, generaliserbart och effektivt än ett annat. *Inläring (ökad förståelse)* blir med denna ansats liktydigt med en kvalitativ förändring av sådana uppfattningar och tankeformer.

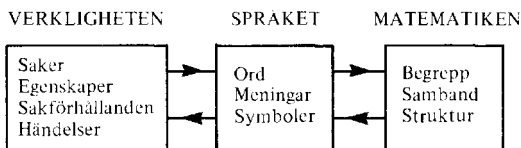
Verklighet — språk — matematik

Våra föreställningar eller uppfattningar kan alltså indelas i olika kvalitativa kategorier. En annan indelningsgrund är: Sakföreställningar (åskådliga föreställningar) eller ordföreställningar (språkliga formuleringar).

En *sakföreställning* ger något konkret, något som omedelbart kan förstås, men det som frammanas i tanken kan för det matematiska begreppet vara oväsentligt och inte utvecklingsbart. Om jag som lärare låter mina elever t ex tänka på apelsiner då man förenklar $3a + 4a$ till $7a$, löser jag kanske ett undervisningsproblem för stunden. Men samtidigt föreligger en klar risk att jag för in mina elever i en begreppsmässig återvändsgränd. Bokstäver i algebran står för tal.

En *ordföreställning* kan vara totalt värdelös om man inte förstår ordet eller om det inte väcker värdefulla associationer. Ta t ex ordet "logaritm". Med språkets hjälp kan man dock formulera viktiga samband som är alltför abstrakta för att adekvat representeras genom sakföreställningar.

Språket kan ses som bryggan mellan den upplevda verkligheten och ett tankeinnehåll. Språket hänvisar till verkligheten och uttrycker ett tankeinnehåll.



Två viktiga funktioner hos det talade ordet i undervisningssituationen kan beskrivas så här:

- Språket hjälper eleverna att bygga upp /utveckla föreställningar om matematiska förhållanden — *inlärningsaspekt* (pilarna åt höger).

- Språket återspeglar vilka uppfattningar eleven har — *diagnosaspekt* (pilarna åt vänster).

Språket är alltså ett viktigt verktyg för läraren. Med dess hjälp får läraren eleven att fundera, att upptäcka, att iaktta, att pröva nya tankeformer osv.

Med dess hjälp kartlägger läraren även hur elevernas förståelse utvecklas, dvs hur inlärnin- gen fortskrider. Ett ensidigt "tyst räknande" i klassrummet ger inte de möjligheter som en lek- tionsform med "tala matematik"-undervisning erbjuder.

Begrepp — samband — räkneoperation

Ett matematiskt begrepp eller en matematisk tan- kegång kan inte direkt "planteras" in i elevens tankevärld. Det läraren kan påverka är elevens föreställning/uppfattning om begreppet eller tan- kegången. Det kanske bästa sättet för läraren att göra detta är att låta eleverna arbeta med varie- rande exempel från varierande sammanhang och att ställa "provocerande" frågor till eleverna. Frågorna ska inte vara "lotsande" frågor som leder fram till ett önskvärt delsvar — utan frågor som faster tvingar eleven att observera och att bli medveten om sitt eget sätt att tänka, resonera, lösa problem osv.

Det gäller för läraren att tala om vad eleven ska leta efter utan att tala om vad eleven ska finna.

En elevs förståelse av (uppfattning om) *mate- matiska begrepp* kan mejslas fram genom att läraren ber eleven ge exempel och motexempel eller ange utmärkande drag enligt följande pro- gression:

- 1) Ge eller känna igen exempel
- 2) Motivera val av exempel
- 3) Ge eller känna igen motexempel
- 4) Motivera val av motexempel
- 5) Ange nödvändiga egenskaper
- 6) Ange tillräckliga egenskaper
- 7) Ange likheter (skillnader) i förhållande till andra begrepp
- 8) Definiera begreppet
- 9) Ange hur begreppet används

På motsvarande sätt kan en lista göras gällande förståelse av *matematiska samband* (vad samban- det säger och varför det är sant):

- 1) Förstå ingående begrepp
- 2) Berätta om innebörden med egna ord
- 3) Ge eller känna igen exempel
- 4) Ange när sambandet används
- 5) Tillämpa sambandet i övningar och enkla pro- blem
- 6) Använda laborativt material eller numeriska exempel för ett bevis
- 7) Ge rimligt argument eller riktigt bevis för att sambandet är sant
- 8) Känna igen och tillämpa sambandet i nya sammanhang

En liknande lista kan göras för "förståelse av en *matematisk räkneoperation*":

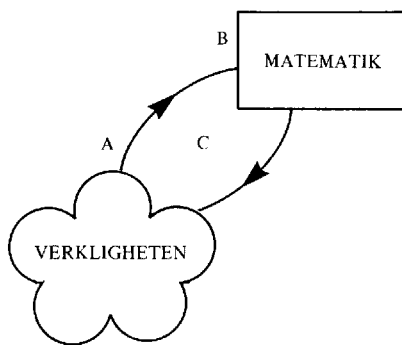
- 1) Utföra operationen noggrant själv
- 2) Visa någon hur operationen utförs
- 3) Beskriva operationen steg för steg
- 4) Ange när operationen används
- 5) Utföra operationen snabbt och säkert
- 6) Förstå nödvändiga förutsättningar
- 7) Finna fel
- 8) Visa att svaret är rimligt
- 9) Ge rimliga argument eller riktigt bevis för att operationen fungerar
- 10) Känna igen och tillämpa operationen i nya sammanhang

De här listorna kan i tillämpliga delar ge uppslag till en arbetsgång för läraren när det gäller förstå- elsen av matematiska begrepp, samband och räk- neoperationer.

Vardagsspråk och matematikspråk

Läraren har tillfälle att "tala matematik" med eleverna då t ex en elev svarar fel, löser en uppgift felaktigt eller klumpigt. Samtalet kan röra sig om t ex rimlighetsbedömning, konsekvenser av ele- vens tankegång, lösningsstrategier.

Att låta eleverna lösa problem gruppvis är ett annat sätt att få eleverna att "tala matematik". Eleverna övas i att uttrycka sig på olika språkliga nivåer eller rent av på olika språk. Man kan tala om tre olika språk. De kan markeras in i en tidigare ritad figur.



A står för vårt vardagsspråk — det vanliga sam- talsspråket, talat eller skrivet. Det är viktigt att läraren och eleven talar "samma språk". Gemen- sam diskussion eller gemensamt samtal kring konkreta händelser i verkligheten och vardagen ger en nödvändig referensram eller erfarenhets- ram. För att kunna lösa matematiska problem måste man vara förtrogen med det område eller den miljö som problemen är hämtade ifrån. Man måste kunna hantera olika uttryck och termer.

Eftersom ett ords eller ett uttrycks betydelse skiftar beroende på sammanhanget är det av stor vikt att läraren bjuder på olika situationer och diskuterar dessa. Eleverna bör få möta och använda ett nyanserat språk på ett omväxlande sätt så att termer och uttryck verkligen växer in i elevens språkliga repertoar.

B står för matematikspråket — de termer, symboler, beteckningar, bilder, diagram osv som är specifika för matematiken. Vi har tidigare sagt att var och en har högst personliga uppfattningar och föreställningar om olika matematiska begrepps innebörd. Det är viktigt att en lärare är medveten om detta. Lyssnar läraren på eleven när eleven beskriver en matematisk tankegång, kan läraren avgöra vilken kvalitet elevens kunskaper har.

Språk **C** är ett övergripande språk, ett slags "metaspråk". Språk **C** hjälper till med "översättningen" mellan språken **A** och **B**. Genom **C** analyserar vi det problem som ska lösas. Språk **C** hjälper oss att finna lämplig matematisk modell t ex lämpligt räknesätt och att bygga upp en vettig arbetsgång vid problemlösningen.

De frågor som läraren ställer till eleverna vid matematiska samtal i klassen ingår i språk **C**. Men detta "planerande språk" eller "problemlösandets språk" måste också eleverna behärska. Eleverna kan tillägna sig detta genom att få diskutera strategier och tankeformer vid problemlösning — genom att få tala *om* matematik.

Sammanfattning

Ska man kunna lösa vardagliga matematiska problem krävs enligt Lgr 80 att:

- man kan förstå problemet och ha en lösningsmetod
- man kan klara de numeriska beräkningar som krävs
- man kan analysera, värdera och dra slutsatser av resultatet.

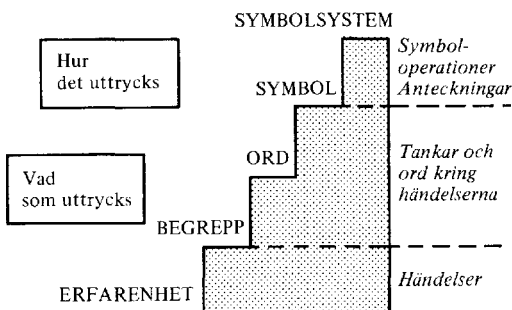
Första fasen kräver kunskaper i språk **A** och **C**. Det andra steget utgörs av språk **B**. Det avslutande momentet är en aktivitet som kanske kräver mest av språk **C**.

Till de ovan citerade punkterna om problemlösning vill jag lägga ytterligare två. Läraren bör ta som sin uppgift att:

- generalisera en lösning
- analysera den använda lösningsmetoden.

Läraren kan göra detta ganska enkelt genom att med eleverna diskutera vad som händer om de givna villkoren ändras och betona var nyckelpunkterna ligger.

Som en liten sammanfattning kan figuren nedan ritas. Den kanske kan väcka några fortsatta didaktiska tankar hos läsaren.



Referenser

- Bratt B och Wyndhamn J, *Språket vår mentala tumme*, Nämnaren nr 1, 83/84
- Davis E J, *Arithmetic Teacher*, Volume 26, Number 1, September 1978
- Domar T, *Begreppsbildning och analys av matematiska resonemang*, Nämnaren nr 4, 85/86
- Gårding L, *Modeller och verklighet*, Nämnaren nr 4, 84/85
- Harvey R m fl, *Language, Teaching and Learning Series*, häfte nr 6
- Holmström G, *Matematik i verkligheten—skolmatematik—verklig matematik*, Nämnaren nr 3, 84/85
- Kilborn W, *Lgr 80 och matematiken*, Nämnaren nr 1, 84/85
- Malmer G, *Matematik med tanke på logik*, Nämnaren nr 4, 84/85
- Wyndhamn J, *Matematikdidaktiska reflexioner*, (Under tryckning)