UPPSLAGET

ANDREJS DUNKELS

Hur får man igång en lektion med så mycket aktivitet som möjligt?

VDM — Vår Dagliga Manipulation — är sedan många år tillbaka en av *Andrejs Dunkels*, Luleå, prövad metod.

Många lärare, som hört Andrejs berätta om VDM, använder idag metoden i sin undervisning med lyckade lektioner som följd. VDM är genomförbart på alla stadier i skolan. Läs och prova själv.

Sen höstterminen 1973 har jag inlett alla lektioner som jag haft i mina egna klasser med en VDM. Förkortningen betydde ursprungligen Vår Dagliga Manipulation och kom till som en övning i att manipulera bokstavsuttryck för nybörjarteknologer. Först visste jag inte att förkortningen redan var upptagen. VDM betyder också Verbi Divini Minister, dvs Herrens Ords Tjänare, och får sättas efter namnet på visitkortet av den som är prästvigd och alltså har rätt att predika. Mitt VDM är på sätt och vis raka motsatsen, det förhindrar mig från att predika. Och det är viktigt, eftersom mina elever har en förmåga att somna när jag pratar. (Ingen lär kunna lyssna effektivt mer än ca 5 minuter åt gången.) Numera har VDM blivit mycket mer än en manipulationsövning. När jag märkte hur bra lektionerna kom igång, hur bra det kändes med hela klassen aktiverad, vävde jag in VDM i min ordinarie undervisning. Ibland kan det bli en repetitionsuppgift, ibland någon detalj som ska inleda ett nytt avsnitt, ibland ett problem med en överraskande vändning som syftar till att eleverna lättare ska minnas ett begrepp eller ett resultat.

Jag inleder alltså lektionerna med att lägga in VDM-uppgiften i arbetsprojektorn. Själv säger jag ingenting. Medan eleverna sätter sig in i problemet utför jag de administrativa sysslor som ofta ska göras vid en lektions början. Sen går jag snabbt runt i klassen och ser hur arbetet går. Jag kommenterar ett och annat, kritiserar och berömmer. När tillräckligt många är färdiga, efter ca 5—10 minuter, diskuterar vi uppgiften. Ibland behöver man inte säga så mycket, ibland räcker det med att avtäcka svaret, och de som är färdiga kan jämföra med sitt svar, de som inte är färdiga kan skriva av svaret och jämföra när de senare hunnit göra färdigt VDM-uppgiften. Vissa gånger kan en VDM-uppgift ta en hel lektion, vissa gånger 10 minuter.

Till fördelarna med VDM hör att lektionen kommer igång med en rivstart. Pennor och papper kommer fram snabbt, alla vet hur lektionen börjar, det känns tryggt, och, som jag redan nämnt, alla aktiveras på en gång. Själv har jag använt VDM vid klassundervisning på högskolenivå. På studiedagar och konferenser, bl a vid den första Matematikbiennalen, har jag berättat om VDM tidigare. Flera lärare i grundskolan och gymnasieskolan har prövat VDM och varit nöjda. Man behöver ju inte vara så strikt som jag och inleda *varje* lektion med en VDM, man kan mycket väl variera och ta VDM då och då. Det viktiga är att man anpassar idén till sin egen undervisningsstil. Inte heller är det nödvändigt att varje gång låta eleverna göra VDM-uppgifterna individuellt, man kan mycket väl bilda grupper eller ha det som klassaktivitet.

Här följer några exempel på VDM med huvudräkning för grundskolan. Jag har valt uppgifter som ger anledning att fortsätta, antingen direkt i anslutning till VDM:en eller vid något senare tillfälle. Uppgifterna innehåller lite utöver själva uträkningsmomentet. De ger på ett naturligt sätt upphov till frågor i stil med "Hur blir det om man fortsätter?", "Blir det alltid så här?" och de uppmuntrar till undersökningar och experiment. Alla uppgifterna går ut på att man utgående från ett eller två startvärden ska bilda ett nytt tal. Av de två uppgifterna för varje stadium är den ena sån att man ska upprepa en och samma procedur om och om igen. I alla uppgifterna är det naturligt att börja med huvudräkning. När man går vidare kan man behöva ta till papper och penna då och då och kanske också räknedosa. En del av uppgifterna är utmärkta att ha som övningar i att programmera en dator.

Lågstadiet

VDM 1

1. TA ETT TVÅSIFFRIGT TAL.
2. LÄGG TILL SAMMA TAL BAKLÄNGES.
3. BLEV DET EN PALINDROM?

PRÖVA FLERA TVÅSIFFRIGA TAL.

Ex 1	Ex 2
65	67
65+56=	67+76=
=121	=143
JA	NEJ

VDM 2

1. VÄLJ ETT TAL.
2. ÄR TALET JÄMNT SÅ DELA MED 2.
3. ÄR TALET UDDA SÅ LÄGG TILL 1.
4. DU HAR ETT NYTT TAL.
5. GÅ TILL PUNKT 2 OCH FORTSÄTT OM OCH OM IGEN.

Ex

10

JÄMNT	UDDA
10/2	5+1
5	6

OSV

Anm Sånt som blir likadant framlänges och baklänges kallas för en *palindrom*. T ex APA, 474, 1991, NI TALAR BRA LATIN, är palindromer, medan SIRAP, PARIS, 356, TOYOTA, inte är det. Att syssla med palindromiska ord och uttryck brukar kallas ATT ORDIDROTTA.

Kommentar till VDM 1

Man kan låta eleverna kartlägga alla tvåsiffriga tal systematiskt efter det att de räknat med tal valda lite på måfå. Talen hamnar då i någon av två kategorier. De tal som inte ger en palindrom kan sen undersökas vidare. Man kan ju fortsätta proceduren. I exempel 2 blir det i nästa steg $143+341=484$, dvs en palindrom. Blir det alltid så? Kommer man alltid till en palindrom om man upprepar proceduren tillräckligt många gånger? (Den här undersökningen kulminerar när man som sista tal ska undersöka 89. Alla tal som börjar på 9 har man ju redan undersökt samtidigt som man undersökte dem som slutar på 9. Och även 89 kommer att ge en palindrom, ett stort, magnifikt tal, och det tar hela 24 steg att komma dit. (**Anm** Alla tvåsiffriga startvärden ger alltså förr eller senare en palindrom. Hur det är med tresiffriga startvärden allmänt vet jag inte. Jag har prövat en del och fått palindromer ibland, medan vissa inte givit någon palindrom ens efter 200 steg, och då har jag inte fortsatt.)

Kommentar till VDM 2

Denna uppgift lämpar sig mycket väl för en fortsatt systematisk undersökning. Kommer man alltid att hamna i talet 1 till slut? Undersökningen kan ju fortsättas hur långt som helst och de elever som känner sig roade kan syssla med aktiviteten t ex när de har tid över någon gång då och då. (**Anm** Man kan ganska lätt allmänt bevisa att den här proceduren alltid ger talet 1 till slut.)

VDM 3

1. TA ETT TVÅSIFFRIGT TAL.
2. RÄKNA UT SIFFERSUMMAN.
3. DRA SIFFERSUMMAN FRÅN TALET.

PRÖVA FLERA TVÅSIFFRIGA TAL. UPPTÄCKER DU NÅGOT?

Ex 1	Ex 2
67	14
13	5
67 - 13 = 54	14 - 5 = 9

VDM 4

1. VÄLJ ETT HELTAL.
2. ÄR TALET JÄMNT SÅ DELA MED 2.
3. ÄR TALET UDDA SÅ MULTIPLICERA MED 3 OCH LÄGG TILL 1.
4. DU HAR ETT NYTT TAL.
5. GÅ TILL PUNKT 2 OCH FORTSÄTT OM OCH OM IGEN.

Ex

10

JÄMNT UDDA

10/2 3·5+1

OSV

5 16

Kommentar till VDM 3

Här kan man med fördel låta eleverna vid något senare tillfälle fortsätta uppgiften genom att upprepa förfarandet på varje nytt tal, om och om igen tills resultatet blir ensiffrigt. Man kan också låta dem utgå ifrån ett tresiffrigt startvärde, fyrsiffrigt, osv. Här blir det ju alltid så att man förr eller senare kommer till 9. Efter första subtraktionen har man alltid ett tal som är delbart med 9, och det gäller hur många siffror man än har i startvärdet. Utvidgningen av denna VDM kan tjäna som inledning till regeln för delbarhet med 9.

Kommentar till VDM 4

En systematisk genomgång av alla startvärden från 1 t o m 50 är givande. Man får t ex anledning att fundera över skillnaden mellan påståendet "Det kommer aldrig att bli 1" och "Jag har ännu inte fått 1 trots att jag gjort 68 steg redan". Första gången som man börjar grubbla över såna saker är när man undersöker startvärdet 27. Man kommer till 1 med det startvärdet, men det tar hela 111 steg, och man har på vägen haft talet 9232 när man varit som högst. Det är f ö variationen av storleken på tal som gör att talen i den här övningen brukar kallas hagelkornstal. Hagelkorn har ju farit upp och ned och växt i storlek innan de till slut faller till marken. En intressant uppföljningsvariant av den här uppgiften är att "köra baklänges". Man börjar alltså med 1 och tänker efter vilka tal som kan vara föregångare till 1. Enda möjligheten är 2. Vilka tal kan vara föregångare till 2? Enda möjligheten är 4. Vilka kan vara föregångare till 4? Då finns det två möjligheter, 8 och 1. Vilka kan vara föregångare till 8? Bara 16. Och vilka kan vara föregångare till 16? Dels 32, dels 15. Osv. (**Anm** Som ett kuriosum kan nämnas att man inte vet allmänt om hagelkornsproceduren verkligen alltid leder till 1. Knappast någon tvivlar, men ingen har lyckats komma på ett allmängiltigt bevis trots att många har försökt. Ingen har heller lyckats hitta något exempel som inte leder till 1. Det har lagts ned många timmars arbete, både av människor och datorer, på det här problemet. Och den senaste uppgiften som jag sett är att man har kontrollerat alla tal upp till 800 000 000 och alltid nått 1. Men jag lovar att den som hittar ett exempel som inte leder till 1 eller ett bevis för att man alltid kommer till 1 blir världsberömd.)

VDM 5

	Ex
1. TA TVÅ PÅ VARANDRA FÖLJANDE UDDA TAL.	31, 33
2. LÄGG IHOP DEM.	31+33 = 64
3. DELA MED 2.	64/2 = 32

PRÖVA FLERA STARTVÄRDEN. UPPTÄCKER DU NÅGOT?

VDM 6

	Ex
1. FÖRSTA TALET VÄLJER DU.	1
2. ANDRA TALET VÄLJER DU. (BÖRJA MED ENSIFFRIGA TAL.)	3
3. TREDJE TALET ÄR ANDRA PLUS 1, ALLTIHOP DIVIDERAT MED FÖRSTA TALET.	$\frac{3+1}{1} = 4$
4. FJÄRDE TALET ÄR TREDJE PLUS 1, ALLTIHOP DIVIDERAT MED ANDRA TALET.	$\frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$
5. FEMTE TALET ÄR FJÄRDE PLUS 1, ALLTIHOP DIVIDERAT MED TREDJE TALET.	$\frac{5/3+1}{4} = \frac{8/3}{4} = \frac{2}{3}$
6. OSV	$\frac{2/3+1}{5/3} = \frac{5/3}{5/3} = 1$
7. OSV	OSV

Kommentar till VDM 5

Den här uppgiften är lämplig att ta upp när man sysslat med bokstavsräkning. Man följer då upp den genom att titta på allmänna fallet, dvs man väljer talen $2n-1$ och $2n+1$ och konstaterar att om summan, $2n-1+2n+1=4n$, divideras med 2 så får man $2n$, dvs alltid ett jämnt tal. Frågor som kanske dyker upp då är t ex ”Hur blir det om man har två på varandra följande jämna tal?”, ”Om man har tre på varandra följande udda tal?”, ”Om man har fyra”, etc.

Kommentar till VDM 6

Den som så önskar kan göra en systematisk genomgång av alla ensiffriga kombinationsmöjligheter efter att ha prövat startvärden på måfå. Senare kan man ta upp övningen med bokstavsräkning, kalla de två första talen för a och b och visa att det sjätte talet alltid blir a och det sjunde alltid b. Därigenom har man på ett slående sätt illustrerat algebrans effektivitet. Det behövs ju inga fler numeriska försök, saken är avgjord en gång för alla.