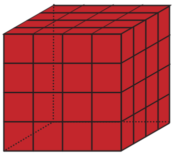
Maria Wærn

Matematik i kubik

I denna artikel beskrivs ett problem som är tänkt för gymnasieelever. Det är möjligt att låta grundskoleelever, ganska långt ner i åldrarna, arbeta med problemet men de behöver då mer hjälp med de generella resonemangen.



Jag vill beskriva ett underbart problem som låter mina elever föra matematiska resonemang om mönster, modeller, funktioner och matematiska generaliseringar. När eleverna försöker lösa problemet uppstår ett matematiskt surr som är som ljuv musik för en matematiklärare. Den entusiasm och det engagemang som finns i diskussionerna är en fröjd att skåda. Eleverna är mer motiverade än någonsin. Stigler och Hiebert (1999) påstår i *The teaching gap* att den typen av undervisning som kännetecknar högpresterande länder i TIMSS är just "the *engagement* of students in *active* struggle with core mathematics concept and procedures".

Problemet

En kub ramlar ned i en burk med rödfärg och plockas genast upp för att torka. Därefter skärs den i mindre kuber som kommer att ha olika antal sidor rödfärgade.

Gör en tabell som visar antalet snitt, det totala antalet småkuber, antalet småkuber med ingen och med en, två, tre eller fler rödfärgade sidor.

Antal små-kuber per sidokant	Antal snitt per sidokant	Totala antalet småkuber	Ingen färg	1 röd sida	2 röda sidor	3 röda sidor	> 3 röda sidor
1	0	1	0	0	0	0	1
2	1	8	0	0	0	8	0
3							
4							
5							
6							
7							
...							
n							

För att ge stöd för visualisering av alla rödfärgade sidor är det bra om eleverna har tillgång till någon form av kuber. De som jag använder fanns att köpa hos Clas Ohlson för en överkomlig summa.

Förslag på lektionsplanering

Låt eleverna sitta i mindre grupper för att diskutera och resonera om hur många rödfärgade sidor det finns på alla småkuber. När elevgrupperna anser sig ha funnit de generella mönstren är det lämpligt att ha en gemensam diskussion.

För att se de mönster som uppstår är det till stor hjälp att göra punktdiagram från tabellerna och försöka finna lämpliga funktioner för att undersöka om resonemangen stämmer. När vi går igenom problemet brukar vi numera använda dator med programvaran TI-Nspire, som ger utmärkta möjligheter till bra diskussioner, samtidigt som vi kan åskådliggöra våra resonemang i programmet. Det har visat sig lämpligt att börja genomgången bakifrån, d v s med de småkuber som har flest antal färgade sidor.

Hur många småkuber har tre röda sidor?

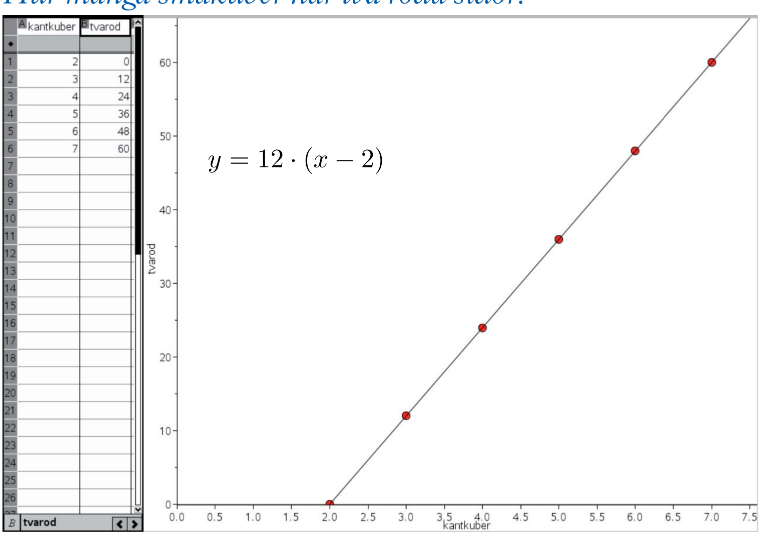
Resonemang

Tre röda sidor har endast småkuberna i den stora kubens hörn.

Den generella formeln
För n småkuber längs en sidokant finns det alltid åtta kuber med tre röda sidor.

Här kan man ha en diskussion om huruvida kuben där inga snitt har gjorts ska få vara med eller ej. Den har ju inte producerat några småkuber och passar därför inte in i vårt mönster. Om den inte ska vara med kan vi även stryka kolumnen med fler än tre röda sidor eftersom ingen av övriga småkuber kan ha det.

Hur många småkuber har två röda sidor?

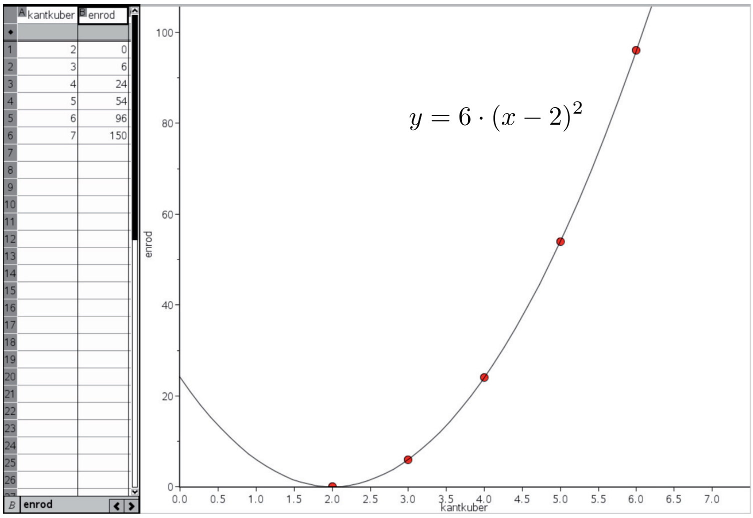


Resonemang
Två röda sidor har bara de småkuber som finns på ”kanterna i mitten” av sidan på storkuben. Det finns 12 kanter på storkuben.

Den generella formeln
För n småkuber längs en sidokant finns det alltid $12(n - 2)$ kuber med två röda sidor.

En diskussion om diskreta värden kontra kontinuerliga värden faller sig naturligt i detta sammanhang. Kan vi alltid ta hjälp av funktioner för att se det diskreta generella mönstret?

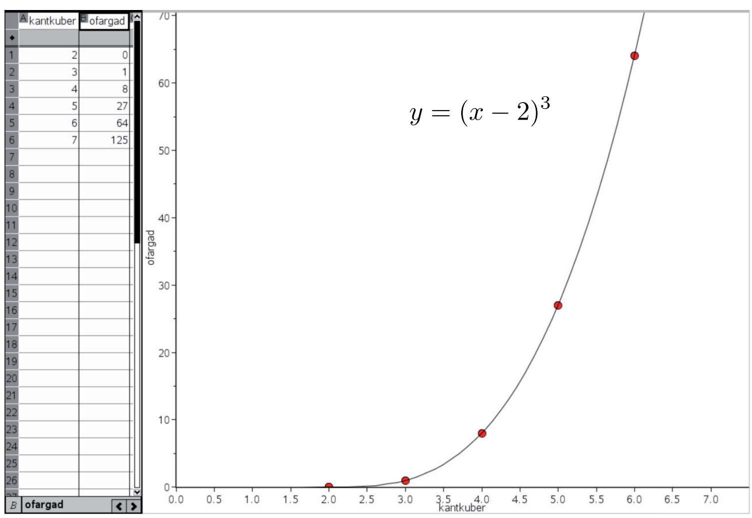
Hur många småkuber har en röd sida?



Resonemang
En röd sida har bara de småkuber som finns mitt på en av den stora kubens sidoytor. Det finns sex sidoytor och en ram av småkuber på en sidoyta måste tas bort.

Den generella formeln
För n småkuber längs en sidokant finns det alltid $6(n-2)^2$ kuber med en röd sida.

Hur många småkuber har ingen röd sida?



Resonemang
Ingen röd sida har bara de småkuber som finns inuti den stora kuben. Det är som en mindre kub innanför den stora kuben då det yttersta lagret av småkuber tagits bort. Sidan på denna mindre kub är $(n-2)$.

Den generella formeln
För n småkuber längs en sidokant finns det alltid $(n-2)^3$ kuber med ingen röd sida.

Sammanfattning

Antal små-kuber per sidokant	Antal snitt per sidokant	Totala antalet småkuber	Ingen färg	1 röd sida	2 röda sidor	3 röda sidor
2	1	8	0	0	0	8
3	2	27	1	6	12	8
4	3	64	8	24	24	8
5	4	125	27	54	36	8
6	5	216	64	96	48	8
7	6	343	125	150	60	8
n	$n-1$	n^3	$(n-2)^3$	$6\cdot(n-2)^2$	$12\cdot(n-2)$	8

Från den ifyllda tabellen framgår det nu att

$$8+12\cdot(n-2)+6\cdot(n-2)^2+(n-2)^3=n^3$$

Men hur kan vi visa det algebraiskt?

Om $n \geq 2$ & $n \in Z^+$, så är

$$((n-2)+2)^3=(n-2)^3+3\cdot(n-2)^2\cdot 2+3\cdot(n-2)\cdot 2^2+2^3=$$

$$(n-2)^3+6\cdot(n-2)^2+12\cdot(n-2)+8=n^3$$

Ett mål med min undervisning är att mina elever ska lära sig att upptäcka mönster och att kunna beskriva dem på ett matematiskt korrekt sätt. Sedan är det så mycket lättare att föra generella resonemang och när tillfälle ges även genomföra matematiska bevis. Dessa mål återfinns även i styrdokumenten. Gymnasieskolans kursmål anger att eleverna ska utveckla sin förmåga att följa och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt. Kursplaner inom IB, International Baccalaureate, förespråkar tydligt att elever bl a ska lära sig ”to recognize patterns and structures in a variety of situations, and make generalizations”.

Fler bra problem som har en undersökande karaktär eller har mer öppna frågeställningar att använda i gymnasieundervisningen i matematik finns i Yee och Hoes bok *Teaching secondary mathematics.*

LITTERATUR OCH LÄNKAR

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.

Yee, L. P. & Hoe, L. N. (2009). *Teaching secondary school mathematics. A resource book.* Singapore: McGraw-Hill Education.

Skolverket (2011). *TIMSS rapporter.* Tillgänglig 2011-03-29 på www.skolverket.se/sb/d/3482/a/19014

TI-Nspire Trialversion. Tillgänglig 2011-03-29 på http://education.ti.com/calculators/downloads/SVERIGE/Software/Detail?id=6768