UPPSLAGET

Robusta och mjuka konstruktioner i dynamisk geometri

Det är inte ovanligt att elever tillämpar en sats utan att undersöka om villkoren för satsen gäller. En arbetsmetod för att göra eleverna medvetna om att undersöka förutsättningarna innan de tillämpar en sats är att undervisa med fokus på att växla mellan det som kallas robusta och mjuka konstruktioner i dynamisk geometri.

Om *A så B* är en mycket kort beskrivning av vad en matematisk sats kan vara. Något längre kan vi beskriva det som att satsens byggstenar är en förutsättning *A*, ett påstående *B* och ett resonemang som leder från *A* till *B*. Om resonemanget är strikt matematiskt och även fullständigt kallar vi det för ett bevis.

Att föra och följa matematiska resonemang finns med i nuvarande läroplaner i kunskapsmålen från åk 3 till och med gymnasiet. Om vi kontrasterar undervisning idag mot för ganska länge sedan, så kunde det förr vara en betoning på resonemang i form av att lära sig bevis av ett flertal satser utantill, utan tanke på satsernas praktiska tillämpning. Detta kunde leda till att eleverna dels inte tänkte på när påståendet behövdes och dels kanske inom kort glömde det resonemang som de hade lärt sig utantill. Sedan några läroplaner tillbaka betonas matematik som ett praktiskt verktyg och i ett sådant resultatorienterat sammanhang för problemlösning är det inte helt ovanligt att eleverna fokuserar en sats påstående utan att undersöka om satsens förutsättningar är uppfyllda, exempelvis genom att tillämpa Pythagoras sats på en triangel som inte är vinkelrät. För att tydligare knyta ihop satsers förutsättningar och påståenden i undervisningen föreslår Lulu Healy att lärare kan planera undervisningen så att eleverna får arbeta med vad hon kallar *robusta och mjuka konstruktioner* i dynamisk geometri. Colette Laborde, som är en av pionjärerna i dynamisk geometri, preciserade dessa begrepp till att i en robust konstruktion bevarar den geometriska konstruktionen sina egenskaper men inte i den mjuka konstruktionen.

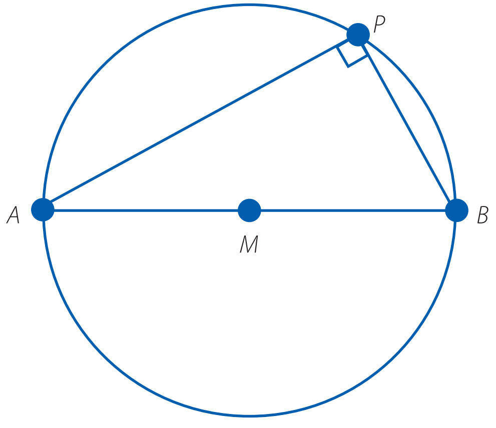
Syftet med den robusta konstruktionen är att verifiera en egenskap medan syftet med den mjuka konstruktionen är att med hjälp av variation synliggöra en viss egenskap i konstruktionen. Laborde hänvisar till både egna och andras studier om detta sätt att i undervisning med dynamisk geometri växla mellan robusta och mjuka konstruktioner för att stödja eleverna i att befästa vilka förutsättningar som krävs för att påståendet i en sats ska vara giltigt.

Allen Leung konstaterade att detta sätt att arbeta ger eleverna tillfällen att uppleva det som variationsteorin kallar kontrast, separation och generalisering och gör eleverna uppmärksamma på att ta hänsyn till vilka förutsättningar som gäller för en bestämd sats.

Därför kan variationsteori användas som stöd för att utveckla hur sådana laborationer i dynamisk geometri kan se ut, exempelvis genom learning study. Jag demonstrerar här hur en robust respektive mjuk konstruktion kan se ut för fallet *Thales sats*, som är ett specialfall av randvinkelsatsen, där *A* och *B* ligger på en diameter.

Att konstruera en rätvinklig triangel

Thales sats säger att om en sida i en triangel ligger längs en cirkels diameter, och om det tredje hörnet också ligger på cirkeln, så är vinkeln vid det tredje hörnet en rät vinkel.



Vi börjar med att ta en noggrann titt på förutsättningarna och påståendet i Thales sats:

- Förutsättning 1 är att alla tre punkterna *A*, *B* och *P* ligger på en cirkel.
- Förutsättning 2 är att basvinklarna *A* och *B* ligger på en diameter.
- Påståendet är att periferivinkeln vid punkten *P* förblir rät när *P* flyttas längs cirkeln.

Vi har en robust konstruktion om förutsättning 1 och 2 är uppfyllda och vi endast kan flytta *P*.

En mjuk konstruktion får vi genom att släppa på någon egenskap i förutsättningarna. Vi får en mjuk konstruktion avseende *A* i förutsättning 1 om vi tillåter *A* att glida längs cirkeln och ställer oss minst en av frågorna: *När är P trubbig? När är P rät?* och *När är P spetsig?* Vi får en mjuk konstruktion (avseende *P*) om vi tillåter *P* i förutsättning 2 att röra sig var som helst i planet och ställer oss minst en av frågorna: *Var i planet är P trubbig/rät/spetsig?*

För att markera var dessa punkter ligger är det lämpligt att använda verktyget ”spår på”, som du i Geogebra når genom att högerklicka på punkten *P*. Andra program för dynamisk geometri har liknande funktioner. En not om påståendets formulering är att om vi arbetar på papper så säger vi nog att *P* är rät för varje punkt *P* på cirkeln, alltså varje enskilt fall, medan i dynamisk geometri säger vi nog när *P* flyttas eller glider längs cirkeln, dvs här betonas kontinuiteten.

Jöran Petersson

LITTERATUR

Brown, S. & Walter,M. (2004). *The art of problem posing*. England: Routledge.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. I S.C. Chu, W.C. Yang and H.C. Lew (red). *Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics*, Cheong-Ju, South Korea: Asian Technology Conference in Mathematics.

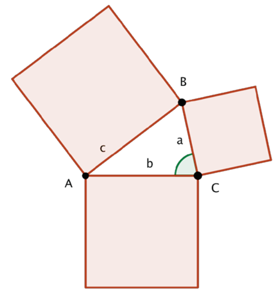
På nästa sida finns förslag på uppgifter som elever kan undersöka med hjälp av Geogebra. På Nämnaren på nätet finns nedladdningsbara Geogebra-filer till detta uppslag.

Robusta och mjuka konstruktioner

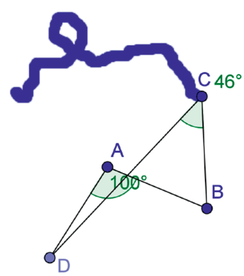
Exempel på undersökande uppgifter

Här följer några förslag på övningar för att undersöka robusta och mjuka konstruktioner i något program för dynamisk geometri. Här är figurerna ritade i Geogebra, som finns på geogebra.org både som online-version och som program att installera på sin egen dator. Med sökfrasen ”robust and soft construction” går det att hitta fler på internet. Det går också att hitta på egna konstruktioner och inspiration finns bland annat i boken *The art of problem posing* av Stephen Brown och Marion Walter, som är utmärkt läsning i konsten att ställa frågor av typen ”vad händer om inte…”.

- Pythagoras sats som *mjuk konstruktion* avseende vinkeln vid C: När är arean c^2 mindre än (alternativt: större än, lika med) arean $a^2 + b^2$? (För att variera en sak i taget, låt gärna konstruktionen vara robust avseende längden på a genom att låta B röra sig längs en cirkel med medelpunkt C och radie a).
- Formulera en förmodan: Om du skulle göra motsvarande experiment för en annan triangel, för vilka vinklar C tror du att arean c^2 är mindre än (större, lika med) arean $a^2 + b^2$? Formulera i ord, formel eller rita en skiss.
- Pythagoras sats som *robust konstruktion* avseende vinkeln vid C: Låt C vara rät. Jämför arean c^2 med arean $a^2 + b^2$.



- Randvinkelsatsen som *mjuk konstruktion* avseende vinkeln vid C: Vinkeln vid punkten C ska vara högst hälften så stor som vinkel vid A. Använd ”spåra på” för punkten C och undersök var i planet detta gäller.
- Formulera en förmodan: Om du skulle göra motsvarande experiment för en annan fyrhörning $ABCD$, var i planet tror du att vinkeln vid C är högst halva vinkeln vid A ($\angle C < \angle A/2$)? Formulera i ord eller rita en skiss.
- I motsvarande *robusta konstruktion* är A medelpunkten i en cirkel och punkterna B, C och D ligger på periferin.



- En mediansats som *mjuk konstruktion* avseende att punkterna E och F inte sammanfaller: Låt CD vara en medianlinje för triangeln. Välj en punkt E på medianen CD och konstruera linjen g genom E så att den är parallell med AC. Välj en punkt F på medianen CD och konstruera linjen h genom F så att den är parallell med BC. Låt linjen h vara parallell med CB och linjen g parallell med AC. Flytta E och F längs CD. När är kvoten $GD/DH > 1$?
- Välj en punkt E på medianen CD och konstruera linjen g genom E så att den är parallell med AC. Välj en punkt F på medianen CD och konstruera linjen h genom F så att den är parallell med BC.
- I motsvarande *robusta konstruktion* sammanfaller punkterna E och F.