Matematik som nöje

Peder Claesson

Detta är en sammanfattning av en bejublad föreläsning om nöjsamma matematikaktiviteter som hölls vid Matematikbiennalen 1994.

Inledning

Så här skrev jag när jag presenterade min föreläsning i Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen:

> *Strävan för både grundskoleeleven och gymnasieeleven skall vara att han/hon får uppleva tillfredsställelsen i att kunna lösa problem. Det är viktigt att eleven utvecklar tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig använda matematik och att använda matematik i olika situationer.*
>
> (Ur Förslag till kursplaner i matematik för grundskolan och gymnasiet.)

> *Om eleverna tycker att matematik är roligt har läraren större möjligheter att lyckas med undervisningen.*

> *Varje matematiklärare tycker förhoppningsvis att matematik är roligt och att hon/han räknar med nöje. Att matematik uppfattas som roligt har kanske till och med varit avgörande för lärarens yrkesval.*

Alla upplever dock inte matematik som rolig och rubriken borde kanske ha varit ”Matematik som mitt nöje”: Som linköpingsbo vill jag därför lämna en lapp, värdig biskopen Hans Brask, i form av *Nöjen* av *Nils Ferlin*.

Att nöjen är högst relativa
jag lärde mig tidigt förstå.
I Nykroppa mente man så:
Vi har en och annan begravning
och så tåget att titta på.

Peder Claesson *är lärare i matematik vid Institutionen för tillämpad lärarkunskap vid Universitetet i Linköping.*

Matematiken i litteraturen

Något som alltid roat mig är hur matematik och matematikundervisning skildras i litteraturen.

En författare som inte uppskattade matematik var *Carl Michael Bellman* som i sin *Levernesbeskrivning* från 1794 berättar om sin matematikundervisning på följande sätt:

> *– omsider fick jag en annan Informator som hette Höckert ock kom till Tulln, den slog mig på fingerstumparna med linialen för det jag eij wille kunna Euclides' ock Collegia (?) Metaphy(s)ica eller Physica –*

Hjernan ännu i mig wrides
när jag tänker på Euclides
ock på de Trianglarna
a b c - ock c d a -
Swetten ur min Panna gnides,
Wärre än på Golgatha.

Jag hoppas att ingen lärare uppträder som informator Höckert, nu när Euklides börjar ”vara inne” igen.

I inledningskapitlet till *Svenskarna och deras hövdingar* ger *Verner von Heidenstam* en romantiserad berättelse om hur positionssystemet upptäcktes av slaven Karilas.

När jag gick i folkskolan i början på 40-talet fick alla elever läsa denna berättelse och jag brukar alltid läsa den för mina elever, med förhoppning om att de skall få samma upplevelse som jag fick en gång.

Jag återger här ett kort avsnitt som dock inte ger berättelsen full rättvisa. Den som är intresserad hänvisas till Svenskarna och deras hövdingar som jag hoppas finns i skolbiblioteket.

Hövdingen med de oräkneliga stenyxorna

Han hette Karilas. En dag för länge sedan hade han mött Ura-Kaipa i skogen, och de hade blivit vänner. Båda var då barn, fast ingen av dem visste, hur gammal han själv var. De kunde bara räkna till nio, det längsta som någon där i skogarna då kunde räkna till. Människorna där brukade räkna på fingrarna, men glömde tummen, som de räknade med.

”Hövding”, sade de, medan trälarna satte på dem huvorna, ”du får underkasta Karilas det stora provet.”

Nu släppte de arbetande sina verktyg, ty de mindes alltför väl, att det hade slutat illa för alla, som blivit dömda till det stora provet.

”Också det begär ni av mig!” svarade Ura-Kaipa. ”Nåväl, Karilas, dina armar är svaga och onyttiga. Varför skall vi då kläda och föda dig? Visa mig om ditt förstånd är starkare än din kropp. Kan du mäta Ura-Kaipas rikedom, ja, då må du leva. Då har du lyckligt genomgått det stora provet. Kan du räkna Ura-Kaipas skatter? Kan du säga mig, hur många stenyxor, som hänga på hans boning?”

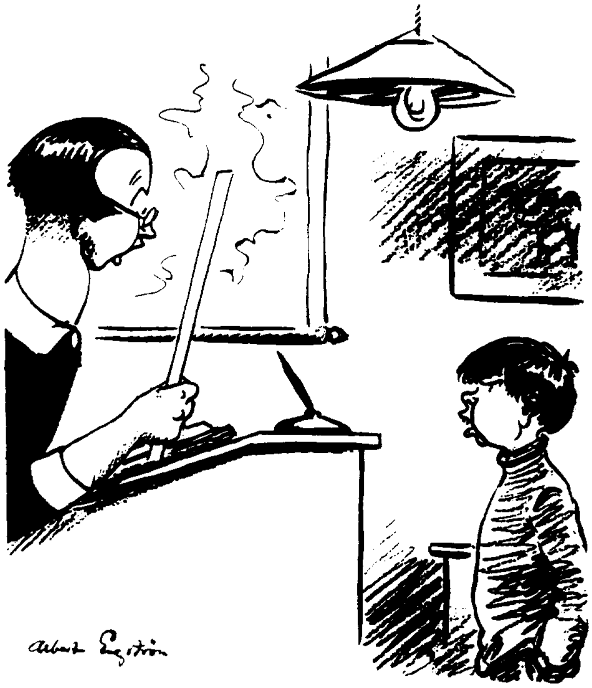
Karilas gick raskt fram och plockade ned nio yxor och lade dem i en hög.

Trälarna och de äldsta skakade på huvudet och begrep inte vad han menade. Men han fortsatte att plocka ned yxorna och lade nio i var hög, ända tills det blev nio högar. ”Det må så vara”, ropade de äldsta, ”men ännu hänger det yxor kvar på offerhuset.”

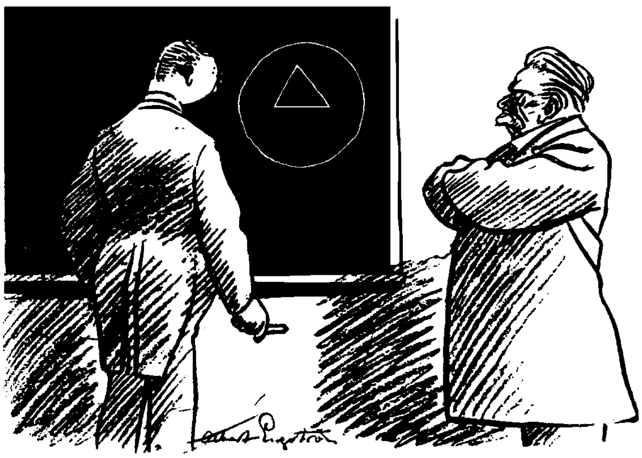
Karilas tog då ned de sista två yxorna och lade dem åt sidan för sig. Han dröjde litet och tvekade. Med ens klarnade gåtan för honom, och han utbrast glättigt: ”Ura-Kaipa, du har nio gånger nio stenyxor och så två.”

Ett sorl av beundran hördes från trälarna. ”Allt intill i dag har mina stenyxor ansetts oräkneliga”, sade Ura-Kaipa, ”men länge har jag märkt att Karilas har höga gåvor, som är förborgade för oss. Skada vore det att ta en sådan träls liv.”

Albert Engström har ritat en mängd roliga bilder från skolans värld. Här är några av dem jag visade på biennalen.

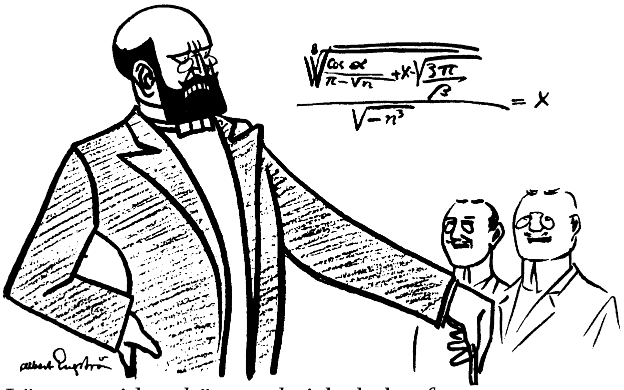


En sjuåring i en förberedande klass i stockholmsskola på söder.
I går sa fröken att 5 och 5 är tio, å idag säger fröken att 7 och 3 är tio. Va faen ska en tro?



Studentexamen för privatister

Censorn: Spritelius, inskriv en liksidig triangel i en cirkel
Spritelius åstadkommer med mycken möda ovanstående figur.
Censorn: Bevisa nu att det är riktigt gjort!
Spritelius: Det behövs inte bevisas, dä syns!



Läraren vid en högre teknisk skola efter en provräkning:
–Jag ska säga herrana att om inte herrarna bättrar sig, så kommer jag inte att dra mig för att om så vore underkänna nittio procent av klassen.
En röst. –Så många ä vi inte!

Erik Andersson har inför sin fader bedyrat att läraren i matematik är svår mot honom.
Pappa Andersson tar pilten med sig och stegar upp till läraren.
Läraren: – Min lille Erik, inte vill jag dig något illa. Men svårt för matematik det har du. Kan du tex säga mig vad 5% av 100 kr är?
Erik, med förvridet ansikte:– Pappa, nu börjar han igen!

Nedanstående är ett kort avsnitt ur ett litterärt tal som Nils Gustav Ormeus översatt från tyska. Talet brukar ofta läsas upp av Gösta Widmark när ämneslärarlinjen i Linköping börjar höstterminenens verksamhet. Själv läser jag det när jag visar på olika tillämpningar av geometriska serier på gymnasiet.

Erich Kästner, Tal vid skolgångens början:

> *Kära barn, där sitter ni nu, sorterade alfabetiskt eller i storleksordning, för första gången på dessa hårda bänkar. En del av er hasar sig oroligt hit och dit, som om ni satt på kokplattor. Andra sitter som fastklistrade på sina platser. Några fnittrar lite fånigt och den där med röda kalufsen i tredje raden stirrar med gåshud i blicken på svarta tavlan som om han såg in i en dyster framtid.*
>
> - - -
>
> *Och en sak till: ränta på ränta behöver ni inte lära er mer, även om det står i kursplanen. När jag var pojke måste vi räkna ut hur mycket pengar det 1925 hade blivit av en daler, som en av våra förfäder anno 1525, under Johan den ståndaktiges regeringstid, satte in på sparbanken. Det var ett komplicerat räknande. Men det lönade sig. Av dalern bevisade man för oss, uppstod genom ränta på ränta, den största förmögenheten i världen. Men så kom inflationen, och år 1925 var världens största förmögenhet inklusive hela sparbanken inte värd en enda daler. Men räknade ränta på ränta gjorde man glatt och muntert i räkneböckerna. Då kom valutareformen 1948 och sparandet och sparbanken var inte mycket att ha. Räkneböckerna har fortfarande inte märkt något. Och så är det hög tid att ni tar en rödpenna och stryker ett tjockt streck över kapitlet ränta på ränta. Det har överlevt sig självt som så mycket annat.*

Problem som nöje

Det som jag uppskattar mest är dock problem, matematiska och andra. I *The Mathematics Teacher* från NCTM presenteras en månadskalender med en uppgift för varje dag. Att det är fler än jag som finner nöje i detta har jag kunnat konstatera på Berzeliusskolan i Linköping, där eleverna samlas kring anslagstavlan, när entusiasten Britt-Marie Borén satt upp månadens uppgifter.

Illustrerad Vetenskap, en svensk månadstidskrift, har också en trevlig problemsida med uppgifter som man kan utmana eleverna med. Glöm inte heller *Nämnarens* problemavdelning.

Jag vill här presentera några olika problemtyper som det har varit roligt att arbeta med. Nöjet är ju över när lösningen är klar. Man bör därför aldrig titta i facit, som är den verkliga glädjedödaren.

Räkna med siffrorna i ett årtal

Detta är en utmaning som den outtröttlige idésprutan Andrejs Dunkels har tipsat mig om. Innevarande år har jag presenterat den på följande sätt för mina elever där jag skrivit ut talen från 1 till 100 på ett A4-papper:

Räkna med 1994

Med hjälp av parenteser, +, –, $\cdot$, /, potenser, $\sqrt{\ }$-tecknet samt siffrorna i 1994 *vars ordning inte får ändras* gäller det att bilda så många tal som möjligt av talen från 1 till 100. Exempel från 1993:

$14 = \sqrt{199} - 3$,
$39 = (1 + \sqrt{9}) \cdot 9 + 3$,
$64 = (1 + \sqrt{9})^{(9/3)}$,
$89 = -1 - \sqrt{9} + 93$.

Namn:..................... Antal tal: ....

1 =	26 =	51 =	76 =
2 =	27 =	52 =	77 =
o s v till			
25 =	50 =	75 =	100 =

Med siffrorna i 1994 och reglerna ovan kan man beskriva flertalet tal mellan 0 och 101.

Talföljder

Talföljder är också roliga att fundera på. När man kommit på lösningen inser man genast att den är rätt. Här kommer två talföljder som man inte behöver vara matematiker för att klara:

Vilka fyra siffror fortsätter serien?

1, 5, 4, 9, 0, 6, _ , _ , _ , _ .

Vilka skulle de fyra följande talen i nedanstående serie kunna vara?

12, 1, 1, 1, 2, 1, 3, _ , _ , _ ,

Multigradare

Ur *Bolt, Boken om aktiviteter i matematik*

Vad är det för märkligt med likheterna

$1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9$ och
$1 + 7 + 8 + 14 = 2 + 4 + 11 + 13$?

Jo $1^2 + 6^2 + 8^2 = 2^2 + 4^2 + 9^2$ vilket är en *multigradare* av andra ordningen och
$1^2 + 7^2 + 8^2 + 14^2 = 2^2 + 4^2 + 11^2 + 13^2$
och
$1^3 + 7^3 + 8^3 + 14^3 = 2^3 + 4^3 + 11^3 + 13^3$,
vilket är en *multigradare* av tredje ordningen.

Jag finner ett stort nöje i att leta efter multigradare. En tågresa mellan t ex Linköping och Stockholm går upplevelsemässigt mycket snabbt om jag skall göra en multigradare av hög ordning under tiden.

Tekniken är följande:
Börja med en enkel likhet som till exempel $1 + 5 = 2 + 4$.
Öka varje term med t ex 5:
$6 + 10 = 7 + 9$.
Låt leden byta plats i den sista likheten. Då fås $7 + 9 = 6 + 10$.

Addera sedan vänsterleden för sig och högerleden för sig och man får en andra ordningens multigradare:

$1 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 10$ och
$1^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 10^2$

Om man vill bilda en tredje ordningens multigradare gör man på samma sätt men man utgår då från en andra ordningens multigradare. Genom att upprepa det förfarande som visats här kan man lätt skapa både fjärde och femte ordningens multigradare och till och med högre ordningar.

Exempel på multigradare av sjätte ordningen

$$1 + 4 + 6 + 12 + 14 + 17 + 23 + 23 = 2 + 2 + 8 + 11 + 13 + 19 + 21 + 24$$
$$1^2 + 4^2 + 6^2 + 12^2 + 14^2 + 17^2 + 23^2 + 23^2 = 2^2 + 2^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 19^2 + 21^2 + 24^2$$
$$1^3 + 4^3 + 6^3 + 12^3 + 14^3 + 17^3 + 23^3 + 23^3 = 2^3 + 2^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 19^3 + 21^3 + 24^3$$
$$1^4 + 4^4 + 6^4 + 12^4 + 14^4 + 17^4 + 23^4 + 23^4 = 2^4 + 2^4 + 8^4 + 11^4 + 13^4 + 19^4 + 21^4 + 24^4$$
$$1^5 + 4^5 + 6^5 + 12^5 + 14^5 + 17^5 + 23^5 + 23^5 = 2^5 + 2^5 + 8^5 + 11^5 + 13^5 + 19^5 + 21^5 + 24^5$$
$$1^6 + 4^6 + 6^6 + 12^6 + 14^6 + 17^6 + 23^6 + 23^6 = 2^6 + 2^6 + 8^6 + 11^6 + 13^6 + 19^6 + 21^6 + 24^6$$

Talskrivning

Figuren nedan innehåller 10 rutor. Skriv in ett tiosiffrigt tal så att siffran i den första rutan anger totala antalet nollor i det tiosiffriga talet. Siffran i den andra rutan, märkt 1, skall ange antalet ettor i talet. Fortsätt så tills Du fyllt i alla siffrorna i de tio rutorna!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Här gäller det att pröva sig fram. Man inser till sitt stora nöje att man gjort rätt när man funnit lösningen.

Multiplikationsträning

Sök det minsta naturliga talet n, så att produkten av n och 999, $n \cdot 999$, inte innehåller siffran 9.

Här får man verkligen träning i multiplikation om man vill pröva sig fram. Det finns dock en enklare metod!

Korsord

1.	2.	3.
4.		
5.		

Vågrätt:
1. Ett fibonaccital
4. Ett kvadrattal
5. Ett perfekt tal

Lodrätt:
1. Ett kvadrattal
2. Ett kubtal
3. En multipel av 9.

Eftersom det endast finns ett tresiffrigt perfekt tal så är inte lösningen så svår att hitta.

Kryptaritmer

Ersätt varje bokstav med olika siffror så att följande additionsuppställning stämmer:

```
    T E N
    T E N
+ F O R T Y
-----------
  S I X T Y
```

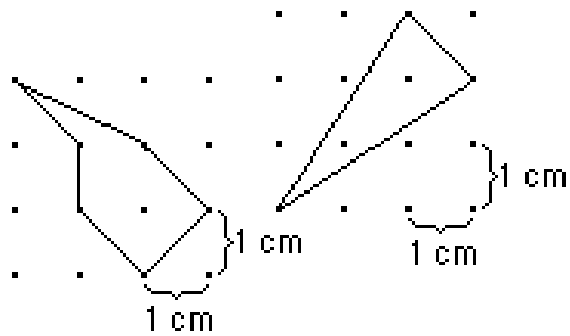
```
  H A L F
+ H A L F
---------
W H O L E
```

Den vänstra av ovanstående kryptaritmer har endast en lösning med den högra har tre olika lösningar.

Geobrädesfigurer

Att arbeta med geobräde verkar vara ett nöje som ännu inte har anammats av så många svenska lärare trots Andrejs Dunkels böcker och artiklar.

Hur stora är figurerna?

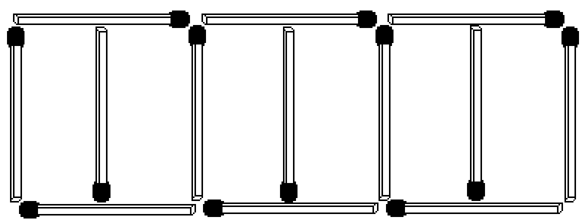


En uppgift liknande den till höger gavs i ett standardprov för åk 9 för några år sedan. Lösningsfrekvensen låg på 4% om jag minns rätt. I Danmark klarar flertalet elever i 10-årsåldern samma uppgift. De använder säkert en annan metod än den svenska högstadieelever försökte sig på.

Geobrädesuppgifter gör geometrin mycket roligare. Det är viktigt att varje elev har sitt eget bräde!

Tändsticksproblem

Ur Bolt, Boken om aktiviteter i matematik:



Teckningen visar hur en bonde använder tretton grindar för att göra sex likadana fårkättar. Olyckligtvis gick en av grindarna sönder.

Visa med tolv tändstickor hur bonden kan göra sex identiska fårkättar med hjälp av de hela grindarna.

Matematik och poesi är ett nöje

Jag vill avsluta med lite matematisk poesi. I Nämnaren 4 77/78 presenterade Adolf af Ekenstam följande dikt som också prytt ett av Nämnarens vykort:

En liten fågel flög en gång
fram över furuskog.
Hans färd var fyra kilometer lång
och tolv minuter tog.
Då flög han rakt mot morgonvinden,
som flickan röda rosor ger på kinden.

När liten fågel se´n mot boet vände,
han intet mer av vindens fläktar kände.
I sena aftonstunden på minuter sju
den lilla fågeln flyger till sin fru.
O yngling, visa att du vet
hur man beräknar vindens hastighet.

Adolf av Ekenstam angav att författaren är okänd men dikten kan ha skrivits av adjunkt Gustaf Lindborg som var lärare vid högre allmänna läroverket i Uppsala i början av 1900-talet och som har skrivit nedanstående vers om pi.

Den lärare som vill uppträda som minneskonstnär kan lämpligen lära sig Pi-poemet som är skrivet på hexameter. Antalet bokstäver i varje ord anger i tur och ordning vilken siffran är i decimalutvecklingen av pi. Den första nollan kommer som den 32:a decimalen och den klarar Gustaf Lindborg genom att ordet ”noll” används. Skickligt!

Som avslutning vill jag ge Euklides upprättelse med följande dikt av *Alf Henrikson:*

Primtalen

Euklides har visat med full evidens
att primtalens antal är utan gräns,
o jubel, o glädjekälla!
Nu kan skolbarnet sitta förnöjt i sin sal
och tänka sig större och större tal
som alla är originella.
Men detta är icke vad skolbarnen gör;
de tycks icke ha nödig förståelse för
vad det har med dem att beställa.

Även Alf Henrikson känner till att det inte finns några ointressanta tal. Detta är för övrigt lätt att bevisa med ett bevis in absurdum:

Antag att det finns ointressanta tal. I mängden av ointressanta tal måste det då finnas ett minsta ointressant tal, t ex 4712. Då skulle detta tal vara intressant eftersom det är det minsta av alla ointressanta tal. Alltså kan det inte finnas något minsta ointressant tal vilket medför att det inte finns några ointressanta tal överhuvudtaget.

Bortse från de tre sista raderna i Alf Henriksons dikt. De gäller inte generellt!

Alla tal kan bidra till att matematiken blir ett stort nöje.

Pi

Hör, I alla i kväll Arkimedes ju lovade komma
Han skall pitalets vanskliga siffror framställa för Er
Dem förvisso rätt mången ej minnes utan ett ode
Tjugotvå giv åt täljarn nämnarens värde noll sju

3,141592653589793238462643383279503

Lästips

Bolt, B. (1984). *Boken om aktiviteter i matematik.* Förlagshuset Gothia, Göteborg.
Dunkels, A. (1983). *Boken om geometri på ett bräde.* Förlagshuset Gothia, Göteborg.