

The great problem of mathematics education is the gap between use and aim; in no other field of instruction is the distance between useless aim and aimless use so great.

Hans Freudenthal

# Taluppfattning och problemlösning

Om problemlösning och taluppfattning skriver här *Adolf af Ekenstam*, Universitetet i Linköping och *Karl Greger*, Göteborgs universitet. Adolf af Ekenstam och Karl Greger arbetar med icke-algoritmiska basfärdigheter (IAB-projektet)

## Inledning

I en engelsk undersökning (referenser finns efter artikeln) gavs följande uppgift:

Ringa in det som är störst av

a)  $8 \cdot 4$  eller  $8/4$

b)  $8 \cdot 0,4$  eller  $8/0,4$

c)  $0,8 \cdot 0,4$  eller  $0,8/0,4$

Resultatet framgår av denna tabell (lösning-frekvenser i procent):

Ålder	Korrekt svar	Multiplikationssvar i alla tre fallen
12	13	50
13	8	58
14	15	47
15	18	30

Bara var femte 15-åring gav alltså rätt svar och varannan 14-åring ansåg att "multiplikation gör större, division mindre".

Skulle svenska elever klara sig bättre? Av resultaten från IEA-undersökningen, Kronobergsrapporten och ARK-projektet är det inte troligt.

En 15-åring som ser kvoten  $\frac{35}{0,7}$  borde inse

- att  $\frac{35}{0,7} > 35$ , eftersom nämnaren är mindre än 1
- att kvoten bör ligga ganska nära 35 eftersom  $0,7 \approx 1$
- att uppgiften *En bil drar 0,7 l/mil. Hur lång sträcka kan man köra på 35 l* löses genom att man dividerar 35 med 0,7.

Önskvärt vore att eleven också själv skulle kunna beskriva en situation som leder till divisionen i

fråga, t ex den just angivna eller *En bit kött kostar 35 kr och väger 0,7 kg. Hur mycket kostar 1 kg kött?* Detta är kanske för mycket begärt även om övningar att formulera egna problem gör eleverna mer förtroga med räknasättens innebörd.

De flesta elever är inriktade på en sak — hur han eller hon skall *beräkna*  $35/0,7$ . ("Hur var det nu man skulle göra — flytta decimaltecknet åt något håll . . .") Många accepterar svaren 5 eller 2 eller t o m 0,2 utan att reflektera.

Orsakerna till detta är säkert flera. En är den svenska undervisningens traditionellt ensidiga inriktning på beräkningsmomentet. Före existensen av billiga miniräknare, tillgängliga för envar, var det ett måste att kunna utföra beräkningar för hand. Alla problem leder till uträkningar, men idag kan tryckningar på ett par knappar ge resultatet. Det väsentliga i uppgiften om bilen tidigare är ju att *begripa* att man skall dividera, *inte* att *utföra* själva räkneoperationen.

## Vad är mål och vad är medel

De matematikproblem man i vardagen möter i samhället rör huvudsakligen tre begrepp som bör utvecklas i den grundläggande matematikundervisningen. Dessa tre är

- antalsbegreppet ("Hur många timmar skall jag jobba?")
- storhetsbegreppet ("Hur mycket kostar en tidning och en glass tillsammans?", "Hur långt kommer jag på 35 l bensin?")
- del-av-begreppet ("Hur stor del av älgen får var och en?", "Hur många procentis löneförhöjning får jag?")

Centralt i matematikundervisningen bör alltså vara att lära eleverna lösa problem där ovanstående begrepp är involverade, dvs att utveckla barns förmåga att besvara de just nämnda tre typerna av frågor. För att möjliggöra detta måste bl a elevernas *taluppfattning*, dvs deras förmåga att uppfatta och använda tal utvecklas. Dessa två — utveckling av barns taluppfattning och problemlösningsförmåga är nog matematikundervisningens huvudmål för elever upp till 14-årsåldern.

Att lära dem att på något sätt utföra beräkningar med hjälp av de fyra räknesätten är naturligtvis också ett mål, men valet av hjälpmedel måste vara tidsenligt, och hjälpmedlet bör vara det effektivast tillgängliga (idag t ex miniräknare).

## Taluppfattning

Någon entydig definition på "taluppfattning" kan vi inte bidra med men följande tabell ger beståndsdelar av den:

Förtrogenhet med positionssystemet och talsskrivningskonventioner är ett viktigt led i utvecklingen av elevernas taluppfattning.

## Diskussion

Av det föregående framgår att vi inte rekommenderar några genomgripande ändringar utan främst förordar en omorientering och en omprioritering av vad som är väsentligt i den elementära matematikundervisningen.

Algoritmräkning i någon form kan förmodligen försvara sin plats främst som ett led i uppbygget av barnens taluppfattning. Den som t ex vill dividera 268 med 7 behöver ha förtrogenhet med tals storleksordning och multiplikativa egenskaper (26 är lite mer än  $3 \cdot 7$ , 58 något över  $8 \cdot 7$ ). Det samspel som råder mellan algoritm-kunskap och förståelse för talbegreppet är svårt att genomskåda. Troligen är också goda färdigheter i "exakt" räkning en god grund för överslagsräkningar.

Det räcker emellertid inte med *ensidig* inrikt-

MOMENT	EXEMPEL
I <i>Tals storleksordning</i> Positionssystemet	Ange det största av talen: 986 1010 1092 1004 1100 Ange ett tal som ligger mellan 0,42 och 0,43. Ordna i storleksordning $\frac{1}{2} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{5}{9}$
II <i>Aritmetik</i> a) Olika sätt att skriva tal som summa, differens, produkt, kvot ("tabellerna")	Beräkna $5 \cdot 6$ $15 = 8 + 7 = 10 + 5$ . Skriv 15 på något annat sätt. Uppdela i primfaktorer a) 12 b) 80
b) Räknesätt m m Algoritmer. Räkning med miniräknare. Decimal framställning och decimala närmevärden till tal i bråkform. Avrundning avtal i decimalform. Samband bråkdela-divisjon-multiplikation	Utför divisionen $248/9$ . Ange resten. Skriv i decimalform (närmevärde) a) $1/2$ b) $2/3$ Hur mycket är $2/3$ av 48?
c) Räknekonventioner	Beräkna a) $4 + 3 \cdot 2$ b) $\frac{5 + 3}{2}$
d) Överslagsräkning, avrundning, rimlighetsbedömning samt huvudräkning	Ungefär hur mycket är $35 \cdot 19$ ? Ange ett närmevärde a) $37/0,9$ b) $23/8 + 9/7$

ning mot algoritmräkning för att utveckla barns taluppfattning. Inom ARK-projektet fann man låg korrelation mellan resultaten på algoritmräkning och uppgifter på t ex förståelse för tals storleksordning eller på överslagsräkning eller på texttolkning. Uppgifter som rörde förståelse för tals storleksordning korrelerade däremot väl med de flesta andra uppgiftstyper. Även det klena resultatet på IEA-undersökningen pekar i samma riktning, dvs att svagheterna hos de svenska eleverna i aritmetik inte låg i algoritmräkning utan i begreppsförståelse, taluppfattning och problemlösning. Bristerna fanns inom det område som kallas *icke-algoritmiska basfärdigheter* — alltså färdigheter som är oberoende av det sätt på vilket beräkningar görs (med hjälp av algoritmer, huvudräkning, miniräknare eller något annat).

En förbättrad matematikundervisning för elever upp till 14—15 år måste alltså ta sikte på att

utveckla en korrekt taluppfattning hos dem och att förstärka deras begreppsförståelse framför allt beträffande de ovan nämnda begreppen.

## Referenser

Björk, L-E och Brolin, H, *ARK-projektet*. Liber Utbildningsförlaget 1984.

Hart, K, *Children's understanding of mathematics 11—16*. John Murray, London 1981.

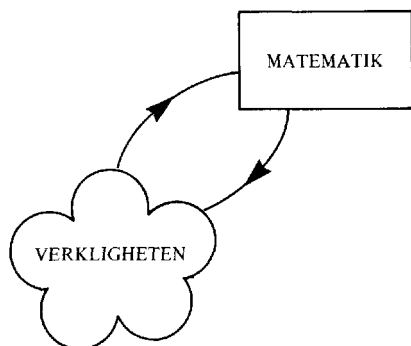
*Matematik i skolan*. Utbildningsdepartementet Ds 1986:5 (Se spec kap 4 om IEA-undersökningen)

*Matematikämnet i förändring — eftertanke och påverkan*. SÖ-fortbildningsmaterial för lärare på mellanstadiet. Liber Utbildningsförlaget 1984.

Oscarsson, E, *Diagnostiska test i matematik*. Rapport 6 1984/85. Länsskolnämnden i Kronobergs län. ("Kronobergsrapporten")

# Om att förstå och att tala matematik

Följande uppsats av *Jan Wyndhamn*, lektor vid lärarutbildningen i Linköping, innehåller tankar från tidigare artiklar i *Nämnan*, och från en ny uppsats *Matematikdidaktiska reflexioner*, se referenser.

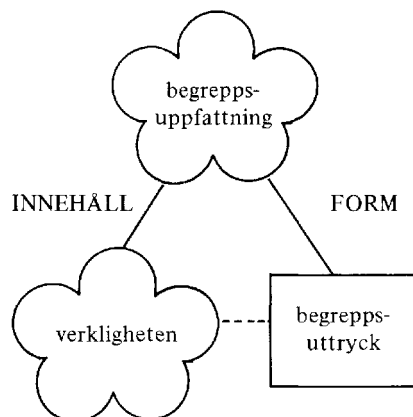


Den matematik vi undervisar om i dagens skola kan kallas *modellmatematik*. Matematiken är på sitt sätt en spegel (en modell) av verkligheten.

Modellen utgörs av matematiska begrepp, samband mellan dessa, räkneoperationer, strukturer och idéer. Begreppen fixeras genom definitioner och uttrycks med hjälp av symboler, som kan hanteras efter vissa "överenskommelser".

När vi arbetar med de matematiska begreppen

faller vi dock tillbaka på personliga föreställningar om dem. Bilden kan nyanseras till



*Verklighet* innebär en materiell situation där objekt, egenskaper, händelser osv kan särskiljas och identifieras.

*Begreppsuttryck* står för "språk" i vid betydelse: